IX SEMANA UNIVERSITÁRIA DA URCA
XXVII Semana de Iniciação Científica da URCA

ISSN 1983-8174

04 a 08 de NOVEMBRO de 2024

Tema: "CIÊNCIA, TECNOLOGIA E AMBIENTE: MÚLTIPLOS SABERES E FAZERES"

TEOREMA FUNDAMENTAL DAS CURVAS ESPACIAIS: CURVAS APLICADAS NA ENGENHARIA.

Nayara Alves da Silva[1], Jaqueline Rodrigues de Alencar Santos[2], Danilo Ferreira da Silva[3]

Resumo: Esse trabalho explora o teorema fundamental para curvas espaciais, destacando sua relevância na geometria e na engenharia. Esse teorema afirma que uma curva no espaço é completamente determinada por sua curvatura e torção. A curvatura indica a mudança de direção da curva, enquanto a torção define o quanto essa ocupa o espaço tridimensional. Uma aplicação prática deste conhecimento é o uso de certos tipos de curvas, como curvas de transição, utilizada na construção de trechos de estradas e ferrovias onde é necessário ligar dois trechos retos em direções diferentes. Uma curva de transição é caracterizada por uma curvatura que varia linearmente, proporcionando segurança e conforto aos motoristas. Este trabalho integra teoria matemática e aplicações práticas, evidenciando a importância das curvas na engenharia.

Palavras-chave: Curvas Planas. Curvas espaciais. Teorema de Frenet-Serret. Geometria diferencial.

1. Introdução

O presente trabalho tem como foco principal o teorema fundamental das curvas espaciais, explorando sua aplicação na construção de estradas. Inicialmente, será feita uma breve introdução sobre curvas no espaço, também chamadas curvas espaciais apresentando os principais conceitos, como curva parametrizada diferenciável, vetores tangente, normal e binormal, curvatura e torção, etc.

O teorema fundamental das curvas espaciais afirma que, dadas duas funções diferenciáveis $k(s)$ e $\tau(s)$ existe uma curva $\alpha(s)$ com curvatura $k(s)$ e torção $\tau(s)$. A curva será única, fixado certas condições iniciais. Além disso, se duas curvas possuem mesma curvatura e torção, elas serão congruentes, ou seja, idênticas exceto por movimentos rígidos no espaço. Mostraremos como esse resultado pode ser aplicado na construção de estradas por meio das

1 Universidade Regional do Cariri, email: nayara.alves@urca.br
2 Universidade Regional do Cariri, email: jaqueline.rodrigues@urca.br
3 Universidade Regional do Cariri, email: danilo.ferreiraa@urca.br

ISSN 1983-8174

curvas de transição que conecta dois trechos da estrada em diferentes direções, fornecendo maior segurança e conforto aos motoristas.

2. Objetivo

Apresentar o Teorema Fundamental das Curvas Espaciais, e mostrar como este pode ser aplicado na construção de estradas, destacando como a compreensão da curvatura e da torção pode melhorar a segurança, a eficiência do tráfego e o conforto dos motoristas.

3. Metodologia

A abordagem metodológica deste trabalho compreende a revisão bibliográfica de parte da obra Keti Tenenblat (2008). Este estudo é fruto da pesquisa desenvolvida no projeto Teorema Fundamental das curvas planas e espaciais e aplicações, vinculada ao PIBIC URCA/FECOP.

4. Resultados

A seguir, apresentamos algumas noções básicas sobre curvas no$\mathbb{R}^3$.

Uma curva parametrizada diferenciável de $\mathbb{R}^3$ é uma aplicação diferenciável $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ de classe C^∞ sobre um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ que a cada t associa $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$.

O vetor $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ é chamado vetor tangente da curva α. Dizemos que α é parametrizada pelo comprimento de arco se $|\alpha'(s)| = 1, \forall\, s \in I$. Nesse caso definimos

Se $\alpha: I \to \mathbb{R}$ é uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco, então a curvatura de α em $s \in I$ é o número real

$$k(s) = |\alpha''(s)|$$

A curvatura $k(s)$ mede a velocidade da mudança de direção da curva.

O vetor tangente é denotado por $t(s) = \alpha'(s)$ e se $k(s) > 0$, o vetor$n(s) = \frac{\alpha''(s)}{k(s)}$, é denominado vetor normal a α em s. Definimos o vetor binormal α em s por

ISSN 1983-8174

$$b(s) = t(s) \times n(s).$$

Note que os vetores $t(s), n(s)$ e $b(s)$ são unitários e ortogonais entre si, logo formam uma base do $\mathbb{R}^3$, chamado *triedro de Frenet* e esse satisfaz as seguintes equações

$$t'(s) = k(s)\, n(s)$$
$$n'(s) = -\tau(s)\, b(s) - k(s)\, t(s)$$
$$b'(s) = \tau(s) n(s),$$

chamadas *fórmulas de Frenet*, o número $\tau(s)$ é chamado torção da curva α.

Para uma demonstração dessas fórmulas verifique a referência [2].

Exemplo 1: A hélice circular parametrizada pelo comprimento de arco é dada por:

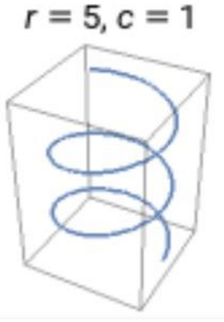
$$\alpha(s) = \left(\mathrm{a} \cos \frac{\mathrm{s}}{\sqrt{\mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2}}, \mathrm{a\ sen} \frac{\mathrm{s}}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{\mathrm{bs}}{\sqrt{\mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2}}\right),$$

A curvatura $k(s)$ de $\alpha(s)$ é:

$$k(s) = |\alpha''(s)| = \frac{a}{a^2 + b^2}.$$

E a torção $\tau(s)$ é dada por:

$$\tau(s) = \langle b'(s), n(s) \rangle = -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$



Fonte: Livro "Introdução a geometria."

Os resultados obtidos através do triedro de Frenet têm aplicações práticas significativas, especialmente na construção de estradas. Os cálculos da curvatura e a torção são essenciais para o design de trajetos que garantam segurança e eficiência.

ISSN 1983-8174

Teorema fundamental das curvas espaciais

a) Dadas duas funções diferenciáveis $\boldsymbol{k(s)} > \boldsymbol{0}\,\boldsymbol{e}\,\tau(s), s \in I \subset \mathbb{R}$, existe uma curva regular $\alpha(s)$ parametrizada pelo comprimento de arco, tal que $\boldsymbol{k(s)}$ é a curvatura e $\tau(s)$ é a torção de α em $\boldsymbol{s}$.

b) A curva $\alpha(s)$ é única se fixarmos um ponto $\alpha(s_0) = p_0 \in \mathbb{R}^3, \alpha'(s_0) = v_1, \alpha''(s_0) = k(s_0)v_2$, onde v_1 e v_2 são vetores ortonormais de $\mathbb{R}^3$.

c) Se duas curvas $\alpha(s)$ e $\beta(s)$ têm a mesma curvatura e torção (a menos de sinal), então α e β são congruentes.

Aplicação - Uma espiral de transição no espaço tridimensional.

No problema de conectar dois trechos retos em uma estrada com direções diferentes, a curva ideal é proposta por Arthur Newell Talbot no artigo, The Railway Transition Spiral (1901), uma curva de transição com um raio de curvatura variando suavemente ao longo da curva. Isso é feito supondo a curvatura em cada ponto, proporcional ao comprimento de arco a partir do ponto de origem da transição. Em [1], determina-se a parametrização da curva de transição, chamada clotoide ou espiral de Euler dada por

$$\alpha(s) = \left(\int_0^s cos\left(\frac{cs^2}{2}\right)ds, \int_0^s sen\left(\frac{cs^2}{2}\right)ds\right).$$

Suponha agora, o problema de conectar dois trechos retos sob uma elevação ou declive específica, ou seja, procura-se uma curva de transição no espaço tridimensional, nesse caso a torção τ e a curvatura k dessa curva devem variar suavemente ao longo da curva. Pelo Teorema Fundamental das Curvas Espaciais, existe um referencial ortonormal $\{t(s), n(s), b(s)\}$ satisfazendo as fórmulas de Frenet e tal que a curva $\alpha(s) = \int_0^s t(r)\,dr$ é a curva com curvatura k e torção τ. Porém, tal parametrização exige integração numérica para ser apresentada. Para obter uma parametrização explícita, considere

$$\alpha(r) = \left(\int_0^r cos\frac{ct^2}{2}dt, \int_0^r sen\left(\frac{ct^2}{2}\right)dt, ar\right),$$

ISSN 1983-8174

com $a, c \in \mathbb{R}$ constantes.

Essa curva apresenta uma curvatura variando proporcionalmente ao longo da curva e terceira coordenada proporcional a um fator de elevação ou declive $a \in R$. Note que nesse caso, a curva não está parametrizada pelo comprimento do arco, acurvatura $k(r)$ varia proporcionalmente ao parâmetro r da curva, mas a torção não, pois

$$k(r) = \frac{|c|}{1+a^2}r, \text{ e } \tau(r) = \frac{\alpha(sen(cr^2)+cr^2\cos(cr^2))}{r(1+a^2)}$$

Por fim, outras curvas são de grande utilidade na engenharia, por exemplo, na engenharia mecânica, o formato de hélice nas molas helicoidais é devido à capacidade de armazenamento de energia potencial elástica ao suportar uma força de compressão, absorvendo energia, fornecendo força e flexibilidade.

Conclusão

Concluímos que o estudo da geometria, especialmente em relação ao teorema fundamental das curvas espaciais, é crucial para diversas áreas, com ênfase na construção de estradas e ferrovias. As curvas no espaço desempenham um papel fundamental na segurança dos veículos, permitindo o projeto de trajetos que garantem confiança e eficácia no deslocamento.

Assim, a compreensão da geometria diferencial se torna essencial para a criação de infraestruturas que atendam às necessidades de mobilidade e segurança.

5. Referências

[1] Agnew, Jeanne L. and Choike James R. Transitions. The College Mathematics Journal, Vol. 18, No. 2 (Mar., 1987), pp. 124-133. Published by: Mathematical Association of AmericaStable. URL: http://www.jstor.org/stable/2686500 .

[2] Tenenblat, Keti. *Introdução à geometria diferencial.* 2. ed. São Paulo: Blucher, 2008.