IX SEMANA UNIVERSITÁRIA DA URCA
XXVII Semana de Iniciação Científica da URCA
ISSN 1983-8174
04 a 08 de NOVEMBRO de 2024
Tema: "CIÊNCIA, TECNOLOGIA E AMBIENTE: MÚLTIPLOS SABERES E FAZERES"

Superfícies de Delaunay - Onduloide

Flávio França Cruz[1], **Patricia da Silva Pereira**[2]

Resumo

Este trabalho aborda as superfícies de Delaunay, isto é, superfícies de revolução com curvatura média constante. Após derivarmos a EDO satisfeita por essa família de superfícies (Teorema de Kenmotsu), focamos na solução chamada de onduloide, que gerada pela rotação de uma curva geratriz periódica.

Palavras-chave: Superfície de revolução. Curvatura média constante. Onduloide.

1 Introdução

Inicialmente apresentaremos algumas definições que serão importante na sequência.

1.1 Superfícies CMC

Consideramos uma superfície S imersa em R^3 imersa parametrizada por uma função diferenciável $X : U \subset R^2 \to R^3$, onde U é um subconjunto aberto de R^2. Seja $q = X(u_0, v_0)$ um ponto qualquer da superfície parametrizada regular $X(D)$. A função curvatura normal de X em q é a aplicação $\kappa_n : T_qX \setminus \{0\} \to R$ definida por

$$\kappa_n(w) = \frac{II_q(w)}{I_q(w)}$$

para $w \in T_qX \setminus \{0\}$. Note que

$$I_q(w) = |w| \text{ e } II_q(w) = \rangle \alpha''(0), N \langle$$

são, respectivamente, a primeira e segunda formas fundamentais de X, sendo α uma curva em X tal que $\alpha(0) = q$ e $\alpha'(0) = w$. Quando restrita ao conjunto dos vetores unitários, a função curvatura normal assume seus valores de máximo e mínimo. Os vetores onde a função atinge tais valores são denominados de *direções principais* e os valores são denomidados de *curvaturas principais*. Assim, se w_1 e w_2 determinas as direções principais, então as curvaturas principais são

$$\kappa_1 = \kappa_n(w_1) \text{ e } \kappa_2 = \kappa_n(w_2)$$

A **curvatura média** de X é definida por

$$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}.$$

[1]Universidade Regional do Cariri, email: flavio.franca@urca.br
[2]Universidade Regional do Cariri, email: patriciada.silva@urca.br

ISSN 1983-8174

Definimos ainda a **curvatura gaussiana** de X por

$$K = \kappa_1 \kappa_2.$$

Podemos demonstrar que as curvaturas gaussiana e média utilizando são as raíezes da equação quadrática

$$(EG - F^2)\kappa^2 - (Ge + Eg - 2Ff)k + eg - f^2 = 0.$$

Em particular,

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \text{ e } H = \frac{1}{2}\frac{Ge + Eg - 2Ff}{EG - F^2}.$$

Uma superfície cuja curvatura média é uma constante é dita uma superfície CMC. Estamos interessados em superfícies de revolução CMC.

2 Superfícies de Revolução CMC

Seja $\alpha(u) = (f(u), 0, g(u)), u \in I \subset R, f > 0$, uma curva regular. A superfície $X(u, v) = (f(u)\cos v, f(u)\text{sen } v, g(u))$ é chamdada de superfície de revolução gerada pela curva α. Quando calculamos a curvatura média de uma superfície de revolução obtemos uma EDO em termos das funções coordenadas da curva geratriz. Neste contexto, temos o seguinte
Teorema.(Solução de Kenmotsu) Dada uma função contínua $H = H(s)$, $(s \in I)$, a curva generatriz de uma superfície de revolução cuja curvatura média é dada por $H(s)$ é escrita da seguinte forma:

$$\alpha(s) = \left(\int_a^b \frac{(G(t) + c_2)F'(t) - (F(t) - c_1)G'(t)}{\sqrt{(F(t) - c_1)^2 + (G(t) + c_2)^2}}\, dt + c_3, \sqrt{(F(s) - c_1)^2 + (G(s) + c_2)^2} \right),$$

onde $\alpha = \alpha(s; H(s); c_1; c_2; c_3)$ para constantes $c_1, c_2, c_3 \in R$ e $F(t)$ *e* $G(t)$ são definidas por

$$F(t) = \int_0^t sen\left(2\int_0^u H(s)ds \right) du \quad e \quad G(t) = \int_0^t cos\left(2\int_0^u H(s)ds \right) du.$$

Demonstraçao: Consideramos o seguinte sistema de equações diferenciais

$$2H(s)y(s) - y(s)x''(s)y'(s) + y(s)y''(s)x'(s) - x'(s) = 0 \tag{1}$$
$$x'(s)^2 + y'(s)^2 = 1. \tag{2}$$

A primeira equação é derivada da curvatura média de superfícies de revolução, enquanto a segunda indica que a curva α está parametrizada por comprimento de arco. Multiplicando a primeira equação por x' e utilizando identidades, simplificamos a equação para obter

$$2H(s)y(s)x'(s) + y(s)y''(s) - x'(s)^2 = 0.$$

ISSN 1983-8174

Substituindo $x'(s)^2$ por $y'(s)^2 - 1$ e reformulando, encontramos

$$2H(s)y(s)x'(s) + (y(s)y'(s))' - 1 = 0.$$

Multiplicamos a primeira equação do sistema por $y'(s)$ e chegamos

$$2H(s)y(s)y'(s) - (y(s)x'(s))' = 0$$

Usando notação complexa para combinar as equações,

$$Z(s) := y(s)y'(s) + i(y(s)x'(s)).$$

A função $Z(s)$ satisfaz a equação diferencial complexa de primeira ordem

$$Z'(s) - 2iH(s)Z(s) - 1 = 0.$$

Resolvendo a equação homogênea, obtemos

$$Z(s) = Ce^{\int_0^s 2iH(u)\,du}, \quad (*)$$

para uma constante C. Aplicamos o método de variação das constantes para resolver a equação, ou seja,

$$Z'(s) = C'(s)e^{\int_0^s 2iH(u)\,du} + 2iC(s)H(s)e^{\int_0^s 2iH(u)\,du} = C'(s)e^{\int_0^s 2iH(u)\,du} + 2iH(s)Z(s)$$

de modo que

$$1 = Z'(s) - 2iH(s)Z(s) = C'(s)e^{\int_0^s 2iH(u)\,du}.$$

Dividindo por

$$e^{\int_0^s 2iH(u)\,du}$$

obtemos

$$C'(s) = e^{-\int_0^s 2iH(u)\,du}.$$

Assim

$$C(s) = \int_0^s e^{-\int_0^u 2iH(t)\,dt}\,du + K,$$

onde $K \in C$. O próximo passo é substituir C por $C(s)$ em $(*)$, resultando em

$$Z(s) = \left(\int_0^s e^{-\int_0^u 2iH(t)\,dt}\,du + K\right) e^{\int_0^s 2iH(u)\,du}.$$

Vamos agora calcular as exponenciais. Temos

$$e^{\int_0^u 2iH(t)\,dt} = \cos\left(2\int_0^u H(t)\,dt\right) + i\sin\left(2\int_0^u H(t)\,dt\right),$$

ISSN 1983-8174

e

$$e^{\int_0^u -2iH(t)\,dt} = \cos\left(-2\int_0^u H(t)\,dt\right) + i\sin\left(-2\int_0^u H(t)\,dt\right) =$$
$$\cos\left(2\int_0^u H(t)\,dt\right) - i\sin\left(2\int_0^u H(t)\,dt\right).$$

Portanto, a solução da EDO será

$$Z(s) = \left(\cos\left(2\int_0^u H(t)\,dt\right) - i\sin\left(2\int_0^u H(t)\,dt\right) + K\right)$$
$$\times\left(\cos\left(2\int_0^u H(t)\,dt\right) + \sin\left(2\int_0^u H(t)\,dt\right)\right).$$

Se definirmos as funções F e G como

$$F(s) := \int_0^s \sin\left(2\int_0^u H(t)\,dt\right)du, \quad G(s) := \int_0^s \cos\left(2\int_0^u H(t)\,dt\right)du,$$

recebemos

$$Z(s) = (G(s) - iF(s) + b + ai)(G'(s) + iF'(s)).$$

Para calcular $y(s)$, consideramos o módulo de $Z(s)$

$$|Z(s)| = |y(s)y'(s) + iy(s)x'(s)|$$

Portanto, a expressão para $y(s)$ será

$$y(s) = \sqrt{(F(s)-a)^2 + (G(s)+b)^2}$$

Para $x(s)$, utilizamos a definição de $Z(s)$ e sua parte imaginária para encontrar

$$x'(s) = \frac{Z(s) - \overline{Z(s)}}{2iy(s)} \quad (**)$$

Finalmente, integramos para obter a expressão de $x(s)$

$$x(s) = \int_0^s \frac{(G(t)+b)F'(t) - (F(t)-a)G'(t)}{\sqrt{(F(t)-a)^2 + (G(t)+b)^2}}\,dt + c$$

Assim, as funções $x(s)$ e $y(s)$ são determinadas, fornecendo a curva geratriz da superfície de revolução.

Consideremos agora o caso $H(s) = H \neq 0$. Lembrando que obtivemos

$$Z(s) = \left(\int_0^s e^{-\int_0^u 2iH(t)dt}du + K\right)e^{\int_0^s 2iH(u)du},$$

ISSN 1983-8174

subtituindo $H(s)$ pela constante H, ou seja,

$$\int_0^s 2iH(t)dt = \int_0^s 2iHdt = 2iHs,$$

obtemos

$$Z(s) = \left(\int_0^s e^{2iHu}du + K\right)e^{2iHs}.$$

Resolvendo a integral,

$$Z(s) = \frac{1}{2iH}\left(B\cos(2Hs+\theta) + iB\sin(2Hs+\theta) - 1\right).$$

Usando que $y(s)$ é o valor absoluto de $Z(s)$,

$$y(s) = |Z(s)| = \frac{1}{|2H|}\sqrt{(B\cos(2Hs+\theta)-1)^2 + (B\sin(2Hs+\theta))^2}$$

$$= \frac{1}{|2H|}\sqrt{B^2\cos^2(2Hs+\theta) - 2B\cos(2Hs+\theta) + 1 + B^2\sin^2(2Hs+\theta)}.$$

Usando a identidade trigonométrica: $\cos^2(A) + \sin^2(A) = 1$ com $A = 2Hs + \theta$, obtemos

$$y(s) = \frac{1}{|2H|}\sqrt{B^2 - 2B\cos(2Hs+\theta) + 1}.$$

e $\sin(A) = -\cos\left(A + \frac{\pi}{2}\right)$. Logo

$$y(s) = \frac{1}{|2H|}\sqrt{B^2 + 2B\sin(2Hs+\theta+\frac{\pi}{2}) + 1}.$$

Agora, buscamos fazer uma mudança apropriada no parâmetro de comprimento de arco para simplificar o argumento do seno. Escolhemos $s = s + \frac{\theta}{2H} - \frac{\pi}{4H}$, de modo que $2Hs = 2Hs + \theta + \frac{\pi}{2}$.
Portanto

$$y(s) = \frac{1}{|2H|}\sqrt{B^2 + 2B\sin(2Hs) + 1}.$$

Assim, segue de $(**)$ que

$$x'(s) = \frac{Z(s) - \overline{Z(s)}}{2iy(s)} = \frac{\mathrm{Im}(Z)}{y},$$

onde $\mathrm{Im}(Z)$ é a parte imaginária de $Z(s)$. Vamos usar

$$Z(s) = \frac{1}{2iH}(B\cos(2Hs+\theta) + iB\sin(2Hs+\theta) - 1).$$

Daí

$$Z(s) = -iB\cos(2Hs+\theta) + B\sin(2Hs+\theta) + \frac{i}{2H},$$

ISSN 1983-8174

considerando apenas os fatores do numerador que acompanham i, obtemos

$$\mathrm{Im}(Z) = \frac{1 - B\cos(2Hs+\theta)}{2H} = \frac{1 + B\sin(2Hs)}{2H}.$$

Substituindo, chegamos a expressão

$$x'(s) = \frac{\mathrm{Im}(Z)}{y(s)} = \frac{\frac{1+B\sin(2Hs)}{2H}}{y(s)} = \frac{1 + B\sin(2Hs+\theta+\frac{\pi}{2})}{\sqrt{B^2 + 2B\sin(2Hs+\theta+\frac{\pi}{2}) + 1}}.$$

Integrando,

$$x(s) = \int_0^s \frac{1 + B\sin(2Ht+\theta+\frac{\pi}{2})}{\sqrt{B^2 + 2B\sin(2Ht+\theta+\frac{\pi}{2}) + 1}}dt + k,$$

onde ké a constante de integração.

Escrevemos $2H\overline{t} = 2Ht + \theta + \frac{\pi}{2}$, e os limites de integração serão

$$t = 0 \to \overline{t} = \frac{\theta}{2H} - \frac{\pi}{4H} = \overline{s} - s,$$

$$t = s \to 2H\overline{t} = 2Hs + \theta + \frac{\pi}{2} = 2H\overline{s} \to \overline{t} = \overline{s}.$$

Portanto, a integral agora se escreve como

$$x(s) = \int_{\overline{s}-s}^{s} \frac{1 + B\sin(2Ht)}{\sqrt{B^2 + 2B\sin(2Ht) + 1}}dt + k.$$

Podemos fazer uma transformação no eixo x escrevendo

$$k = \int_{\overline{s}-s}^{0} \frac{1 + B\sin(2Ht)}{\sqrt{B^2 + 2B\sin(2Ht) + 1}}dt \quad \text{quando} \quad \overline{s} - s > 0,$$

$$k = -\int_{0}^{\overline{s}-s} \frac{1 + B\sin(2Ht)}{\sqrt{B^2 + 2B\sin(2Ht) + 1}}dt \quad \text{quando} \quad \overline{s} - s < 0.$$

Assim, finalmente

$$x(s) = \int_0^s \frac{1 + B\sin(2Ht)}{\sqrt{B^2 + 2B\sin(2Ht) + 1}}dt,$$

e a curva geratriz é expressa como

$$\alpha(s, H, B) = \left(\int_0^s \frac{1 + B\sin(2Ht)}{\sqrt{B^2 + 2B\sin(2Ht) + 1}}dt, \frac{1}{2H}\sqrt{B^2 + 2B\sin(2Hs) + 1}\right). \quad (***)$$

Para diferentes valores de B a curva geratriz α gera diferente superficies. Estamos interessados na onduloide que é obtida quando a curvatura $H(s) = H$ não depende de s e $0 < B < 1$. Observemos que, nesse caso, a primeira coordenada de (***) tem como derivada:

$$x'(s) = \frac{1 + B\sin(2Ht)}{\sqrt{1 + B^2 + 2B\sin(2Hs)}}.$$

ISSN 1983-8174

Quando $0 < B < 1$, essa expressão é estritamente positiva, o que implica que $x(t)$ é estritamente crescente. Considerando que $y(t)$ é periódica com período $\frac{2\pi}{H}$, a curva geratriz no plano oscila entre as retas $y = \frac{1-B}{2H}$ e $y = \frac{1+B}{2H}$.

A curva geratriz possui um aspecto sinodal, uma vez que $x'(s)$ é periódica com período $\frac{\pi}{H}$. Se $A = \int_0^{\frac{\pi}{H}} x'(s)ds > 0$, então temos

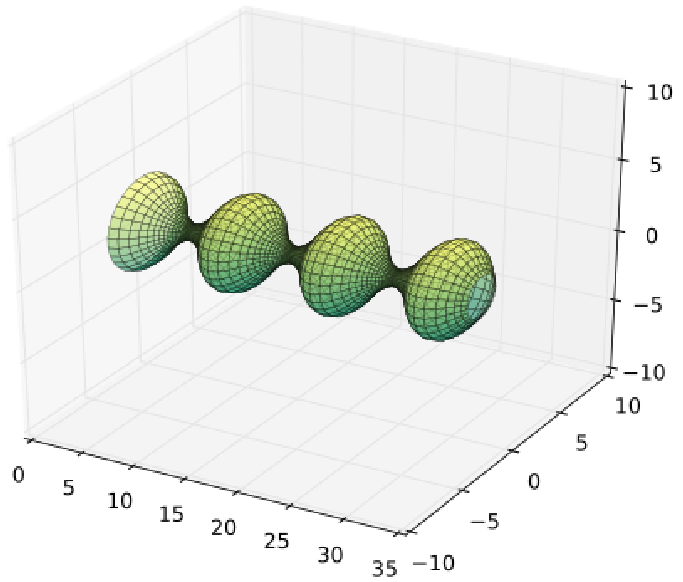
$$x\left(s + \frac{n\pi}{H}\right) = x(s) + nA,$$

onde n é um número inteiro. Isso indica que, para cada incremento de $\frac{\pi}{H}$ em s, a coordenada x aumenta em nA, reforçando o comportamento crescente da curva geratriz.

3 Conclusão

Concluímos que podemos classificar as superfícies de revolução CMC utilizando técnicas de resolução de EDO. Ademais, para o caso H>0, mostramos que a solução obtida é um ondulóide.

Figura 1: onduloide.



4 Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

ISSN 1983-8174

Referências

[1] CARMO, Manfredo P. do. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.

[2] KENMOTSU, K. **Surfaces with Constant Mean Curvature**. American Mathematical Society, 2003.

[3](Figura 1) **Onduloide.**