

A rigidez da esfera

Flávio França Cruz¹, Talita da Silva Damasceno²

Resumo

Neste trabalho apresentaremos o Teorema de Rigidez da esfera euclidiana R^3 . Precisamente, iremos mostrar que se tivermos uma isometria $\phi : \Sigma \rightarrow S$ de uma esfera Σ para uma superfície S , então S é também uma esfera. Para isso, utilizaremos o Teorema que garante que uma superfície regular, conexa e compacta com curvatura Gaussiana constante é uma esfera.

Palavras-chave: Rigidez da esfera. Curvatura Gaussiana constante. Superfície conexa e compacta.

1 Introdução

Inicialmente vamos enunciar o principal resultado deste trabalho.

Teorema Principal: Seja S uma superfície regular, conexa e compacta com curvatura Gaussiana K constante. Então, S é uma esfera.

Para demonstrar esse resultado são necessários alguns conhecimentos que iremos apresentar a seguir.

1.1 Curvatura Gaussiana

Curvatura Normal: Seja $X : D \subset R^2 \rightarrow R^3$ uma superfície parametrizada regular e $q = (u_0, v_0) \in D$. A função curvatura normal de X em q é uma aplicação $\kappa : T_q X - \{0\} \rightarrow R$ que, para cada vetor $w \in T_q X$ não-nulo, associa

$$\kappa_n(w) = \frac{II_q(w)}{I_q(w)},$$

onde, $I_q(w)$ e $II_q(w)$ são a primeira e a segunda forma fundamental de X , respectivamente.

Sabemos que, restrita a vetores unitários, a função curvatura normal assume valores de mínimo e máximo (proposição 6.1 de [2]), define-se as curvaturas principais κ_1 e κ_2 como os valores de mínimo e máximo de κ_n , respectivamente. Daí, partir delas, podem ser definidas a Curvatura Média $H(q) = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}$ e a **Curvatura Gaussiana** $K(q) = \kappa_1 \kappa_2$. Podemos ainda encontrar K utilizando os coeficientes das formas fundamentais como

$$K(q) = \frac{e_0 g_0 - (f_0)^2}{E_0 G_0 - (F_0)^2}$$

¹Universidade Regional do Cariri, email: flavio.franca@urca.br

²Universidade Regional do Cariri, email: talita.damasceno@urca.br

1.2 Ponto umbílico

Seja $X : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular. Um ponto $q \in X(D)$ é dito ponto umbílico se as curvaturas principais de X coincidem em q . Isto quer dizer que a função curvatura normal em um ponto umbílico é constante.

1.3 Classificação dos pontos de uma superfície

Veremos agora que um ponto pode ser classificado de acordo com o sinal da curvatura Gaussiana.

Seja $X(u, v)$ uma superfície parametrizada regular. Dizemos que $q = (u, v)$ é um ponto

- I. elíptico se $K(q) > 0$;
- II. hiperbólico se $K(q) < 0$;
- III. parabólico se $K(q) = 0$ e $H(q) \neq 0$;
- IV. planar se $K(q) = 0$ e $H(q) = 0$.

1.4 Alguns resultados importantes

Listamos a seguir resultados que iremos utilizar na demonstração do Teorema principal.

Proposição 1: Seja $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua definida em um conjunto compacto A . Então f admite valores de mínimo p_1 e de máximo p_2 para todo $p \in A$.

Proposição 2: Se todos os pontos de uma superfície conexa são umbílicos, então ela está contida em um plano ou em uma esfera.

O Lema abaixo é central para nossa demonstração.

Lema 1: Seja S uma superfície regular e $p \in S$ de tal forma que

- I. $K(p) > 0$; ou seja, a curvatura Gaussiana em p é positiva;
- II. p é ponto de máximo local da função κ_1 e ponto de mínimo local da função κ_2 ($\kappa_1 \geq \kappa_2$).

Então p é ponto umbílico de S .

O próximo resultado pode ser demonstrado facilmente, basta tomar o ponto da superfície que está mais distante da origem.

Lema 2: Uma superfície regular compacta $S \subset \mathbb{R}^3$ possui, pelo menos um, ponto elíptico.

2 O Teorema Principal

Nesta seção apresentamos a demonstração do Teorema Principal. **Demonstração do Teorema Principal:** Como S é compacta, pelo Lema 2 ela possui, pelo menos um, ponto elíptico. Temos ainda que K é constante, logo $K > 0$ em S . Pela proposição 1 a função contínua κ_1 em S atinge um máximo em um ponto $p \in S$. Como $K = \kappa_1 \kappa_2$ é uma constante positiva, κ_2 é uma função decrescente de κ_1 , e, portanto, ela atinge um mínimo em p . Segue do lema 1 que p é um ponto umbílico, ou seja, $\kappa_1(p) = \kappa_2(p)$.

Agora seja $q \in S$ qualquer. Como estamos admitindo $\kappa_1(q) \geq \kappa_2(q)$, temos que

$$\kappa_1(p) \geq \kappa_1(q) \geq \kappa_2(q) \geq \kappa_2(p) = \kappa_1(p)$$

Portanto, $\kappa_1(q) = \kappa_2(q)$, para todo $q \in S$. Logo, todos os pontos de S são umbílicos, daí, pela proposição 2, S está contida em um plano ou em uma esfera. Como $K > 0$, S está contida em uma esfera Σ . Pela compacidade, S é fechada em Σ , e como S é uma superfície regular, S é aberta em Σ . Como Σ é conexa, segue que $S = \Sigma$. Portanto S é uma esfera.

Agora vamos provar a rigidez da esfera.

Seja $\phi : \Sigma \rightarrow S$ uma isometria de uma esfera $\Sigma \subset R^3$ sobre uma superfície regular $S \subset R^3$. Então $\phi(\Sigma) = S$ tem curvatura constante, pois a curvatura não varia por isometrias. Além disso, como ϕ é contínua e Σ é compacta e conexa, então $\phi(\Sigma) = S$ é compacta e conexa. Logo, segue do Teorema que S é uma esfera.

3 Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

Referências

- [1] CARMO, Manfredo P. do. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.
- [2] TENENBLAT, Ketí. **Introdução à Geometria Diferencial**. São Paulo: Editora Edgard Blucher Ltda, 2008.