IX SEMANA UNIVERSITÁRIA DA URCA
XXVII Semana de Iniciação Científica da URCA

04 a 08 de NOVEMBRO de 2024

Tema: "CIÊNCIA, TECNOLOGIA E AMBIENTE: MÚLTIPLOS SABERES E FAZERES"

ISSN 1983-8174

Superfícies de Delaunay – O Catenóide

Flávio França Cruz[1], **Yasmin Ferreira Carlos**[2]

Resumo

O presente trabalho apresenta um estuda das superfícies de Delaunay, ou seja, superfície de revolução que possuem curvatura média constante. Após obtermos a EDO satisfeita por esta família de superfícies (Teorema de Kenmotsu), nos restrigimos ao caso mínimo, especificamente, analisaresmo o catenoide, que é obtido pela rotação da catenária.

Palavras-chave: Superfície de revolução. Superfície mínima. Curvatura média constante. Catenoide.

1 Introdução

Inicialmente apresentaremos os conceitos de geometria diferencial que serão necessários para deduzir nossos resultados.

1.1 Formas Quadráticas

Seja $X : D \subset R^2 \to R^3$ uma superfície parametrizada regular. Definiremos duas formas quadráticas sobre a superfície. A primeira está relacionada ao comprimento de curvas na superfície, ao ângulo entre vetores tangentes e à área de regiões da superfície; enquanto a segunda está relacionada à curvatura de curvas da superfície.

1.1.1 Primeira Forma Quadrática

Tomemos uma curva suave $(u(t), v(t))$ em D e seja $X(t) = X(u(t), v(t))$ imagem da curva por X. Assim, $X(t)$ é uma curva espacial contida em $X(D)$ cujo vetor tangente é dado por

$$\frac{dX}{dt} = \frac{du}{dt}X_u + \frac{dv}{dt}X_v.$$

Note que os vetores $X_u(u, v)$ e $X_v(u, v)$ formam uma base do plano tangente a $X(D)$ em $X(t)$,
O quadrado do comprimento de $\frac{dX}{dt}$ é dado por

$$\left\langle \frac{dX}{dt}, \frac{dX}{dt} \right\rangle = E(u') + 2F(u')(v') + G(v')^2$$

[1]Universidade Regional do Cariri, email: flavio.franca@urca.br
[2]Universidade Regional do Cariri, email: yasmin.ferreira@urca.br

ISSN 1983-8174

Utilizando a notação

$$E = E(u,v) = \langle X_u, X_u \rangle (u,v);$$
$$F = F(u,v) = \langle X_u, X_v \rangle (u,v);$$
$$G = G(u,v) = \langle X_v, X_v \rangle (u,v).$$

e

$$I_X = E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2.$$

concluimos que o comprimento da curva será

$$\int \sqrt{I_X}.$$

Com base nesta análise definimos a forma quadrática I_X, chamada de primeira forma fundamental de $X(D)$, pondo

$$I_X(v) = |v|^2 = Ea^2 + 2Fab + Gb^2$$

para qualquer vetor tangente $v = aX_u + bX_v$ de $X(S)$.

Observação. As funções $E(u,v),\ F(u,v)$ *e* $G(u,v)$ são diferenciáveis e ditas coeficientes da primeira forma fundamental da superfície parametrizada X.

1.1.2 Segunda Forma Quadrática

O vetor normal a superfície parametrizada $X(D)$ é dado por

$$N = \frac{X_u \wedge X_v}{|X_u \wedge X_v|},$$

onde $\wedge$ denota o produto vetorial. Se denotarmos

$$e = e(u,v) = \langle X_{uu}, N \rangle (u,v)$$
$$f = f(u,v) = \langle X_{uv}, N \rangle (u,v)$$
$$g = g(u,v) = \langle X_{vv}, N \rangle (u,v),$$

um cálculo direto nos dá

$$\left\langle \frac{d^2X}{dt^2}, N \right\rangle = e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2.$$

No intuíto de captar a componente da derivada segunda de X na direção do vetor normal, definimos

$$II_X(v) = ea^2 + 2fab + gb^2$$

para o vetor tangente $v = aX_u + bX_v$. A forma quadrática II_X é chamada de segunda forma quadrática de $X(D)$.

Observação. As funções $e(u,v),\ f(u,v)$ *e* $g(u,v)$ são diferenciáveis e chamadas de coeficientes da segunda forma fundamental da superfície parametrizada X.

ISSN 1983-8174

1.2 Curvatura Média

Nesta seção introduzimos o conceito fundamental de curvatura média de uma superfície. Precisaremos estabelecer algumas definicões preliminares.

1.2.1 Curvatura Normal

Consideremos a notação fixada acima. Seja $q = X(u_0, v_0)$ um ponto qualquer da superfície parametrizada regular $X(D)$. A função curvatura normal de X em q é a aplicação $\kappa_n : T_qX \setminus \{0\} \to R$ definida por

$$\kappa_n(w) = \frac{II_q(w)}{I_q(w)}$$

$w \in T_qX \setminus \{0\}$. Quando restrita aos conjunto dos vetores unitários, a função curvatura normal assume seus valores de máximo e mínimo. Os vetores onde a função atinge tais valores são denominados de *direções principais* e os valores são denomidados de *curvaturas principais*. Assim, se w_1 e w_2 determinas as direções principais, então as curvaturas principais são

$$\kappa_1 = \kappa_n(w_1) \text{ e } \kappa_2 = \kappa_n(w_2)$$

A **curvatura média** de X é de finida por

$$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}.$$

Definimos ainda a **curvatura gaussiana** de X por

$$K = \kappa_1\kappa_2.$$

Podemos demonstrar que as curvaturas gaussiana e média utilizando são as raíezes da equação quadrática

$$(EG - F^2)\kappa^2 - (Ge + Eg - 2Ff)k + eg - f^2 = 0.$$

Em particular,

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \text{ e } H = \frac{1}{2}\frac{Ge + Eg - 2Ff}{EG - F^2}.$$

Uma superfície cuja curvatura média é uma constante é dita uma superfície CMC. Particularmente, se a curvatura média é nula dizemos que a superfície é mínima. Estamos interessados em superfícies de revolução CMC.

2 Superfícies de Revolução CMC

Seja $\alpha(u) = (f(u), 0, g(u)), u \in I \subset R, f > 0$, uma curva regular. A superfície $X(u, v) = (f(u)\cos v, f(u)\text{sen } v, g(u))$ é chamdada de superfície de revolução gerada pela curva α. Quando calculamos a curvatura média de uma superfície de revolução

ISSN 1983-8174

obtemos uma EDO em termos das funções coordenadas da curva geratriz. Neste contexto, temos o seguinte

Teorema.(Solução de Kenmotsu) Dada uma função contínua $H = H(s)$, $(s \in I)$, a curva generatriz de uma superfície de revolução cuja curvatura média é dada por $H(s)$ é dada por

$$\alpha(s) = \left(\int_a^b \frac{(G(t)+c_2)F'(t) - (F(t)-c_1)G'(t)}{\sqrt{(F(t)-c_1)^2 + (G(t)+c_2)^2}}\, dt + c_3, \sqrt{(F(s)-c_1)^2 + (G(s)+c_2)^2} \right),$$

onde $\alpha = \alpha(s; H(s); c_1; c_2; c_3)$, para $c_1, c_2, c_3 \in R$ constantes e $F(t)$ *e* $G(t)$ são definidas por

$$F(t) = \int_0^t sen\left(2\int_0^u H(s)ds \right) du \quad e \quad G(t) = \int_0^t cos\left(2\int_0^u H(s)ds \right) du.$$

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [2].

Aqui abordaremos o caso do caso $H(s) \equiv 0$. Assim, $F(t) \equiv 0$ e $G(t) = s$. Logo

$$\alpha(s) = \alpha(s; 0; c_1; c_2; c_3) = \left(\int_0^s \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + (t+c_2)^2}}\, dt + c_3, \sqrt{c_1^2 + (t+c_2)^2} \right).$$

Supondo $c_1 \neq 0$, através de uma mudança de parâmentro do comprimento de arco e uma homotetia nas coordenadas (x, y), provamos que $\alpha(s; 0; c_1; c_2; c_3)$, é uma catenária $y = \cosh x$. De fato, através de uma transformação paralela do comprimento de arco $\overline{s} = s + c_2$ e uma mudança da variável de integraçao $\overline{t} = t + c_2$, $\alpha(s; 0; c_1; c_2; c_3)$ se torna

$$\left(\int_{c_2}^{\overline{s}} \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + \overline{t}^{\,2}}}\, d\overline{t} + c_3, \sqrt{c_1^2 + \overline{s}^{\,2}} \right).$$

Através de uma transformação paralela do eixo x, colocamos

$$c_3 = \int_0^{c_2} \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + \overline{t}^{\,2}}}\, d\overline{t}$$

para $c_2 > 0$, e

$$c_3 = -\int_{c_2}^{0} \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + \overline{t}^{\,2}}}\, d\overline{t}$$

para $c_2 < 0$. Porquanto, obtemos a curva

$$\left(\int_0^s \frac{c}{\sqrt{c^2 + t^2}}\, dt, \sqrt{c^2 + s^2} \right) \qquad (-\infty < s < +\infty).$$

Assumiremos $c > 0$. Resolvendo a integral da primeira coordenada, temos

$$x = \int_0^s \frac{c}{\sqrt{c^2 + t^2}}\, dt = c\, log\left(\frac{s + \sqrt{c^2 + s^2}}{c} \right) \qquad (s > 0).$$

ISSN 1983-8174

Como $y = \sqrt{c^2 + s^2}$, obtemos

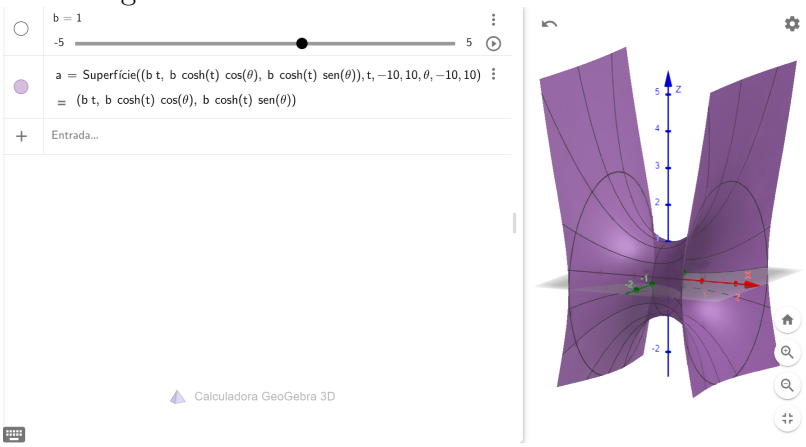
$$\frac{y}{c} = \frac{1}{2}(e^{\frac{x}{c}}, e^{-\frac{x}{c}}).$$

No sistema de coordenadas (x, y), a expressão acima é dada por $y = \cosh x$, ou seja, uma catenária. Portanto, para $c_1 \neq 0$, a superfície mínima obtida através da rotação é um **catenoide.**
Para $c_1 = 0$, $X(s; 0; 0; c_2; c_3)$ é uma parte da linha $x = c_3$ e, por conseguinte, a supefície de revolução obtida é parte de um plano.

3 Conclusão

Concluimos o trabalho verificando que a única superfície mínima de revolução é o catenóide, que é obtida pela rotação da catenária. Apresentamos abaixo uma imagema de um catenóide.

Figura 1: Catenoide construída no GeoGebra.



4 Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

Referências

[1] CARMO, Manfredo P. do. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.

[2] KENMOTSU, K. **Surfaces with Constant Mean Curvature**. American Mathematical Society, 2003.

[3](Figura 1) **Catenoide construída no GeoGebra.** Imagem desenvolvida pelos autores.