

**TEOREMA FUNDAMENTAL DAS CURVAS PLANAS: UMA APLICAÇÃO NA
CONSTRUÇÃO DE ESTRADAS**

**Jaqueline Rodrigues de Alencar Santos¹ Nayara Alves da Silva² Danilo
Ferreira da Silva³**

Resumo: O referido trabalho tem como objetivo apresentar o Teorema fundamental das curvas planas e e uma aplicação na construção de estradas. O Teorema Fundamental das Curvas Planas permite para uma função diferenciável qualquer $k: I \rightarrow \mathbb{R}$, determinar uma única curva $\alpha(s)$ parametrizada pelo comprimento do arco com curvatura $k(s)$ satisfazendo $\alpha(s_0) = p_0, \alpha'(s_0) = v_0$, para dado $s_0 \in I$, e determinado v_0 um vetor unitário de $\mathbb{R}^2$. Ademais, duas curvas $\alpha(s)$ e $\beta(s)$, parametrizadas pelo comprimento do arco com mesma curvatura, diferem-se por um movimento rígido, isto é, por sua posição no plano.

Palavras-chave: Geometria diferencial. Curvas Planas. Teorema fundamental. Espiral de Cornu.

1. Introdução

Em geometria diferencial uma curva plana é uma aplicação $\alpha(s): I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^∞ sendo infinitamente diferenciável, sobre um intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, chamada curva parametrizada diferenciável. Usando conceitos do cálculo diferencial, estuda-se o comportamento das curvas, suas propriedades e características. Nesse contexto, um resultado fundamental é o chamado Teorema fundamental das curvas planas. uma transformação composta por uma translação T ou uma rotação L no plano $\mathbb{R}^2$. No referido trabalho, estudamos a clotoide, também conhecida como espiral de Cornu uma curva plana em que o raio de curvatura é inversamente proporcional ao comprimento de arco, partindo da origem do eixo como mostra a figura abaixo

1 Universidade Regional do Cariri, e-mail: jaqueline.rodrigues@urca.br¹

2 Universidade Regional do Cariri, e-mail: nayara.alves@urca.br²

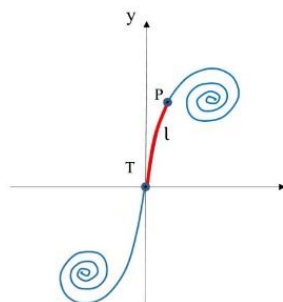
3 Universidade Regional do Cariri, e-mail: danilo.ferreiraa@urca.br³

IX SEMANA UNIVERSITÁRIA DA URCA

XXVII Semana de Iniciação Científica da URCA

04 a 08 de NOVEMBRO de 2024

Tema: "CIÊNCIA, TECNOLOGIA E AMBIENTE: MÚLTIPLOS SABERES E FAZERES"



A espiral de Cornu, possui um decrescimento linear da curvatura conforme é percorrida, proporcionando assim, uma variação gradual da força centrífuga, consequentemente torna-se o tipo ideal de curva de transição na construção de estradas e ferrovias. Relacionando-se o tema a aplicação nas construções de estradas temos em questão, um veículo que trafega em um trecho reto não está sujeito a esforços laterais, diferentemente do que ocorre quando ele entra em um trecho curvo. Nessa situação, a força centrífuga começa a atuar, tendendo a desviar o veículo do trajeto. Assim surgem as curvas de transição, pois elas possibilitam uma mudança gradativa de um trecho reto para uma curva circular.

2. Objetivo

O presente trabalho tem como o principal objetivo, apresentar o teorema fundamental das curvas planas e uma importante aplicação na construção de estradas e ferrovias.

3. Metodologia

A pesquisa do presente trabalho é do tipo exploratória e foi realizada com a principal fonte de estudo o livro "Introdução à Geometria Diferencial" da autora Ketí Tenenblat. Para a produção desse trabalho foram apresentados seminários semanalmente durante o desenvolvimento do projeto da bolsa PIBIC URCA/FECOP, com o intuito de aprender, debater e conhecer mais o sob o tema em questão para assim desenvolver esse projeto.

4. Resultados

IX SEMANA UNIVERSITÁRIA DA URCA

XXVII Semana de Iniciação Científica da URCA

04 a 08 de NOVEMBRO de 2024

Tema: "CIÊNCIA, TECNOLOGIA E AMBIENTE: MÚLTIPLOS SABERES E FAZERES"



Para enunciar o teorema fundamental das curvas planas segue algumas definições abaixo:

Definição: Seja $\alpha = (x(t), y(t))$, $t \in I$ uma curva parametrizada diferenciável, o vetor tangente a curva α no instante t é dado por: $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t))$.

Uma curva parametrizada diferenciável é dita regular, se para todo instante t , $\alpha'(t) \neq (0, 0)$.

Definição: Uma curva regular α é dita parametrizada pelo comprimento de arco (p.c.a) se para cada instante t_0 e t_1 , com $t_0 \leq t_1$, o comprimento de arco da curva α de t_0 a t_1 é igual a $t_1 - t_0$, isto é:

$$\int_{t_0}^{t_1} |\alpha'(t)| dt = t_1 - t_0$$

O Teorema Fundamental das Curvas Planas garante que uma curva parametrizada pelo comprimento de arco é determinada essencialmente pela sua curvatura com sinal.

Teorema: O Teorema Fundamental das Curvas Planas nos diz que a partir de uma função diferenciável $k(s)$, $s \in R$, existe uma curva regular $\alpha(s)$, isto é, $\alpha'(s) \neq (0, 0)$, parametrizada pelo comprimento de arco s , cuja curvatura é $k(s)$. A demonstração do Teorema Fundamental das curvas planas nos fornece um algoritmo—para dada a função curvatura, e assim obter a parametrização da curva.

Demonstração: a) Seja $\theta(s) = \int_{s_0}^s k(s) ds$, tal que $s_0 \in I$ é fixo. Fixaremos um ponto $p_0 = (x_0, y_0)$ de $\mathbb{R}^2$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Definimos uma curva $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ por

$$x(s) = x_0 + \int_{s_0}^s \cos(\theta(s) + \lambda) ds,$$
$$y(s) = y_0 + \int_{s_0}^s \sin(\theta(s) + \lambda) ds,$$

Vejamos que a curva α definida desta forma está parametrizada pelo comprimento de arco s e sua curvatura é $k(s)$. Sabendo que o referencial de Frenet é dado por

IX SEMANA UNIVERSITÁRIA DA URCA

XXVII Semana de Iniciação Científica da URCA

04 a 08 de NOVEMBRO de 2024

Tema: "CIÊNCIA, TECNOLOGIA E AMBIENTE: MÚLTIPLOS SABERES E FAZERES"



$$t(s) = \alpha'(s) = (\cos(\theta(s) + \lambda), \sin(\theta(s) + \lambda)) e$$

$$n(s) = (-\sin(\theta(s) + \lambda), \cos(\theta(s) + \lambda)),$$

logo, $|\alpha'(s)| = 1$ e a curvatura de α é dada por

$$\langle t'(s), n(s) \rangle = \theta'(s) = k(s).$$

b) Seja $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco s , tal que a curvatura é $k(s)$, temos das equações de Frenet que

$$t'(s) = k(s)(-y'(s), x'(s)),$$

ou seja, $x(s)$ e $y(s)$ satisfazem as equações

$$x''(s) = -k(s)y'(s),$$

$$y''(s) = -k(s)x'(s).$$

Curvas de Transição na Construção de Estradas

Na construção de estradas ou ferrovias um dos problemas encontrados é descobrir o formato de um certo trecho, chamado comumente de curva, que deve conectar duas partes reta da estrada com direções diferentes. Uma primeira tentativa é o formato circular, porém, devido a mudança repentina do raio de curvatura do trecho reto (infinito) para o raio de curvatura finito do trecho circular, isso implicaria uma mudança brusca de direção na curva, causando um desconforto aos motoristas, insegurança na estrada e risco de acidente. No artigo, *The Railway Transition Spiral (1901)*, Arthur Newell Talbot, propôs que uma curva de transição para a situação exposta, deve possuir um raio de curvatura variando suavemente ao longo da curva. Isso é feito supondo a curvatura da curva em cada ponto, proporcional ao comprimento de arco da curva a partir do ponto de origem da transição. Seguindo *Transition*, vamos determinar com auxílio do Teorema Fundamental das Curvas Planas a parametrização para essa curva de transição.

Seja $k(s)$ uma função diferenciável, O Teorema Fundamental das Curvas Planas, garante a existência de uma curva $\alpha(s)$ parametrizada pelo comprimento de arco s tal que $k(s)$ é sua curvatura e com parametrização dada por $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, onde

IX SEMANA UNIVERSITÁRIA DA URCA

XXVII Semana de Iniciação Científica da URCA

04 a 08 de NOVEMBRO de 2024

Tema: "CIÊNCIA, TECNOLOGIA E AMBIENTE: MÚLTIPLOS SABERES E FAZERES"



$$x(s) = \int_0^s \cos\theta(t)dt \text{ e } y(s) = \int_0^s \sin\theta(t)dt,$$

com $\theta(t)$ o ângulo que a tangente faz com o eixo x.

Supondo $k(s)$ proporcional ao comprimento de arco s , $k(s) = cs$, para alguma constante $c \in \mathbb{R}$. Lembrando que $k(s) = \theta'(s)$, integrando obtemos

$$\theta(s) = \int cs ds = c \frac{s^2}{2} + b,$$

com $b \in \mathbb{R}$ uma constante.

Supondo $\alpha(0) = (0, 0)$ o ponto inicial da curva e desde que em $s = 0$ o ângulo inicial $\theta_0 = 0$, tem-se

$$\theta(s) = c \frac{s^2}{2}.$$

Portanto, a curva de transição

$$\alpha(s) = \left(\int_0^s \cos\left(\frac{cs^2}{2}\right) ds, \int_0^s \sin\left(\frac{cs^2}{2}\right) ds \right).$$

chamada *clotoide* ou *espiral de Cornu*.

5. Conclusão

Diante do exposto conclui-se assim que o estudo da geometria diferencial exclusivamente em relação ao teorema fundamental das curvas planas, é essencial e de grande importância para diversas áreas, com destaque na construção de estradas ferroviárias. Dessa foram, as curvas horizontais com transição ajudam a garantir maior segurança aos usuários e a evitar graves acidentes nas estradas, preservando assim a vida de muitos que trafegam diariamente nessas ferrovias.

6. Referências

AGNEW, Jeanne L. and Choike James R. *Transitions*. The College Mathematics Journal, Vol. 18, No. 2 (Mar., 1987), pp. 124-133. Published by: *Mathematical Association of America Stable*. URL: <http://www.jstor.org/stable/2686500>.

TENENBLAT, Ketí. *Introdução à geometria diferencial*. 2. ed. São Paulo: Blucher, 2008.