Curvas fechadas e convexas no $\mathbb{R}^2$

Talita da Silva Damasceno
Flávio França Cruz

1 Introdução

Neste trabalho vamos mostrar que a convexidade de uma curva plana, simples e fechada é equivalente a convexidade do domínio delimitado pela curva. Precisamente, iremos apresentar a definição de convexidade para conjuntos do plano e o conceito de convexidade para curvas planas. Em seguida, vamos mostrar a relação existente entre a convexidade da curva plana simples e fechada e a convexidade da região delimitada por ela. O resultado central deste trabalho pode ser enunciado da seguinte forma

Teorema 1. Seja α: $[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva de Jordan, regular e de classe C^1 e Ω a região delimitada por α. Então Ω é convexo se, e somente se, α for convexa.

Para entendermos esse resultado vamos apresentar algumas definições importantes.

1.1 Conjuntos convexos

Seja $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}^2$ um subconjunto do plano. Dizemos que $\mathbf{A}$ é convexo e para quaisquer $p, q \in \mathbf{A}$, o segmento de reta $\overline{pq}$ ligando p e q estiver inteiramente contido em $\mathbf{A}$.

Um disco de raio R centrado na origem $D = \{p \in \mathbb{R}^2 : ||p|| < R\}$ é um exemplo de uma região convexa. De fato, se $p, q \in D$ então segue da desigualdade triângular que

$$||(1-t)p + tq|| \leq (1-t)||p|| + t||q|| < (1-t)R + tR = R$$

para $0 \leq t \leq 1$. Portanto, $(1-t)p + tq \in D$. Já o anel $A = \{p \in \mathbb{R}^2 : r < ||p|| < R\}$ limitado pelas circunferências de raio R e r centradas na origem, com $R > r > 0$, é uma região não convexa. De fato, os pontos $p = (\frac{R+r}{2}, 0)$ e $q = (-\frac{R+r}{2}, 0)$ pertencem a A mas a origem não pertence.

1.2 Curvas fechadas e convexas

Dizemos que uma curva regular $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ é convexa em $s_0 \in I$ se o traço de α está inteiramente contido em um dos semi-planos fechados determinados pela reta tangente à α em s_0. Dizemos que α é convexa se for convexa em todos os pontos de I.

Dizer que α é convexa é o mesmo que dizer que a funçao $h : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$h(s) = \langle \alpha(s) - \alpha(s_0), \eta(s) \rangle,$$

não muda de sinal, onde η denota o normal de α. Dizemos que α é estritamente convexa em s_0 se α é convexa e $\alpha(s_0)$ é o único ponto de α sobre a reta tangente à α em s_0. Em termos da função $h(s)$ definida acima, isso nos diz que $h(s)$ só se anula se $s = s_0$.

A noção de convexidade de uma curva também está intimamente relacionada a curvatura da curva. Por isso temos o seguinte resultado.

Teorema 2. Seja α: $I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ uma curva regular, simples e fechada. Então, α é convexa se, e somente se, sua curvatura não muda de sinal.

Agora vamos definir o que é reta suporte, um conceito bastante útil em nosso estudo. Sejam **A** um subconjunto do $\mathbb{R}^2$ e p um ponto de fronteira de A. Dizemos que a reta r que passa por p é uma reta suporte de A em p, se A estiver totalmente contido em um dos semi-planos fechados determinados por r. A proposição enunciada a seguir não será demonstrada mas é necessária na demonstração do próximo resultado, pois ela garante a existência de uma reta suporte para uma região convexa.

Proposição: Se Ω é convexo e p é ponto de fronteira de Ω, então existe uma reta suporte para Ω em p.

Para entendermos o próximo resultado precisamos entender o que vem a ser uma curva de Jordan. Uma curva $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ é dita simples e fechada quando α é injetiva em $[a, b)$ e $\alpha(a) = \alpha(b)$, ou seja, seu único ponto duplo ocorre nos seus pontos inicial e final. Quando uma curva é simples e fechada a denominamos de curva de Jordan. Agora vamos enunciar o lema utilizado na demonstração do Teorema 1.

Lema: Seja $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ uma curva de Jordan, regular e de classe C^1, e seja Ω o fecho da região delimitada por α. Se Ω é convexo então, para cada

$s \in [a, b]$, a reta tangente à α em s é a única reta suporte de Ω em $\alpha(s)$.

2 Objetivos

Este trabalho tem como principais objetivos:

- Mostrar a relação existente entre a convexidade de uma curva e a convexidade da região delimitada por essa curva;
- Demonstrar o Teorema 1 que exibe a relação existente entre uma curva convexa e a região convexa determinada pela curva.

3 Metodologia

Este trabalho foi realizado através de pesquisa bibliográfica, estudo individual e realização de seminários com o professor orientador.

4 Conclusão

Concluímos que a princípio as definições de conjunto convexo e curva convexa diferem bastante mas, como foi mostrado, existe uma forte relação entre elas expressa pelo Teorema 1.

5 Referências

SANTOS, W.; ALENCAR, H. *Geometria Diferencial das Curvas Planas*, 24º Colóquio Brasileiro de Matemática. [S.L]: IMPA, 2003.