VIII SEMANA UNIVERSITÁRIA
XXVI SEMANA DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA URCA
INTERIORIZAÇÃO DA CIÊNCIA E REDUÇÃO DE ASSIMETRIAS: O PAPEL DOS PIBIC'S COMO EXPERIÊNCIA DE ARTICULAÇÃO DA PESQUISA NA GRADUAÇÃO E NA PÓS-GRADUAÇÃO
UNIVERSIDADE REGIONAL DO CARIRI
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
CEARÁ GOVERNO DO ESTADO
SECRETARIA DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA E EDUCAÇÃO SUPERIOR

Sobre a Propriedade do Valor Intermediário e a soma de funções

Yasmin Ferreira Carlos [1] **Flávio França Cruz** [2]

Introdução

Uma função $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ possui a Propriedade do Valor Intermediário (PVI) se para quaisquer $a, b \in I$, se $f(a) < d < f(b)$, então existe $c \in I$ tal que $f(c) = d$. O Teorema do Vaor Intermediário (TVI) garante que funções contínuas possuem a PVI. Outro resultado que apresenta uma condição suficiente é o Teorema de Darboux:

Teorema(de Darboux): Se $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é derivável no intervalo I então $f' : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ possui a Propriedade do Valor Intermediário.

Sabemos que a soma de funções contínuas é uma função contínua e a a derivada da soma de funções é a soma das derivadas. Portanto, é natural conjecturamos que *a soma de funções que possui a PVI também é uma função que tem a PVI.* Neste trabalho investigamos essa conjectura. Ressaltamos que este trabalho é fortemente inspirado no artigo [1].

1 Soma de funções e a PVI

No que segue, buscamos responder a seguinte pergunta:

Se f e g possuem a PVI, podemos afirmar que $f + g$ possui a PVI?

A resposta, em geral, é não. Vejamos um contra-exemplo.
Considere as funções

$$F(t) = \begin{cases} t^2 \text{sen}(1/t) & \text{se } t \neq 0 \\ 0 & \text{se } t = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad G(t) = \begin{cases} t^2 \cos(1/t) & \text{se } t \neq 0 \\ 0 & \text{se } t = 0. \end{cases}$$

Temos

$$F'(t) = \begin{cases} 2t\text{sen}(1/t) - \cos(1/t) & \text{se } t \neq 0 \\ 0 & \text{se } t = 0 \end{cases}$$

e

$$G'(t) = \begin{cases} 2t\cos(1/t) + \text{sen}(1/t) & \text{se } t \neq 0 \\ 0 & \text{se } t = 0. \end{cases}$$

Note que $f(t) := [F'(t)]^2$ e $g(t) := [G'(t)]^2$ possuem a PVI pois as funções F' e G' possuem a PVI, pelo Teorema de Darboux. Todavia, ao somarmos f e g, obtemos

$$(f + g)(t) = \begin{cases} 4t^2 + 1 & \text{se } t \neq 0 \\ 0 & \text{se } t = 0 \end{cases}$$

Assim, $f + g$ não tem a PVI em nenhum intervalo que contenha 0 já que $(f + g)(t) > 1 > 0 = (f + g)(0), \forall t \neq 0$.

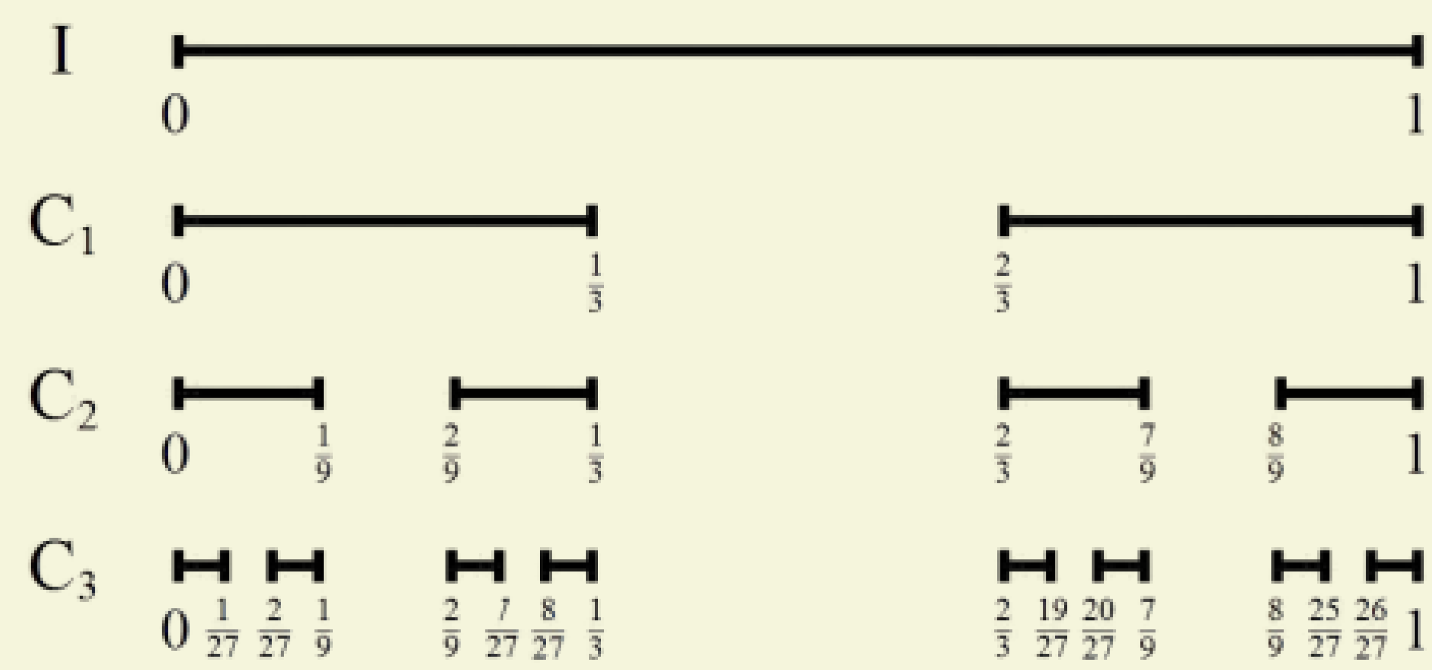
Podemos formular uma versão fraca da pergunta acima. Precisamente, *se f é contínua e g possui a PVI, podemos afirmar que $f + g$ possui a PVI?*

Mostraremos, novamente, que a resposta é negativa.

Iniciamos a demonstração pela construção de uma sequência $\{C_i\}$ de conjuntos de Cantor .

Definição. Seja K o conjunto obtido retidando, sucessivamente, os terços médios abertos do intervalo $[0, 1]$. O conjunto K dos pontos não retirados é o conjunto de Cantor (ver figura).

Note que o conjunto de Cantor K é a diferença entre um conjunto fechado e a união de conjuntos abertos e como a união de abertos é um aberto, segue que K é um conjunto fechado.



Construção do Conjunto de Cantor

Dada a função g_i contínua, estritamente crescente e que mapeia C_i em [0,1], tal que, para cada i,

$$g(x) = \begin{cases} g_i(x) & \text{se } \in C_i \\ 0 & \text{se } x \in [0, 1] - \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i. \end{cases}$$

Temos que g tem a PVI, pois, para cada aberto (a, b) arbitrário contido em $[0, 1]$, há um i tal que $C_1 \subset (a, b)$ e $g(C_i) = [0, 1]$.

Temos ainda que, para uma função real $p(x)$ definida em $[0, 1]$, $||p|| = sup|p(x)|$. Definimos, então, uma sequência $\{f_1\}$ de funções contínuas em [0,1], tais que $\sum_{i=1}^{\infty} ||f_1|| < \infty$ e que $f = \sum_{i=1}^{\infty} f_1$ é contínua em [0,1]. $\{f_i\}$ será construída de modo que $(f + g)(x) \neq \frac{1}{2}$ para qualquer valor de $x \in [0, 1]$. Desse modo, $(f + g)$ não possui a PVI.

Como g é contínua em C_1, há uma coleção finita $\bigcup_1$ de intervalos abertos, cujos extremos são disjuntos aos pares, que cobre C_1 de forma que x e y estão em $O_{1i} \in \bigcup_1$ para algum i, então $|g(x) - g(y)| < \epsilon_1 < \frac{1}{3}$. Seja V_1 a coleção de intervalos abertos em $\bigcup_1$ que contém valores de x que satisfazem $g(x) = \frac{1}{2}$. Definimos $f_1(x) = \epsilon_1$ para os valores de x em V_1 e $f_1(x) = 0$ para valores de x que estão em $\bigcup_1$ mas não em V_1. Assim, temos que $(f_1 + g)$ é contínua em C_1 e $(f_1 + g)(x) \neq \frac{1}{2}$ para todo $x \in C_1$.

Em seguida, definimos δ_1 como a distância entre $\frac{1}{2}$ e a imagem de $(f + g)(C_1)$, isto é, $\delta_1 = \rho(\frac{1}{2}, [f + g](C_1))$. Note que $\delta_1 \leqq \epsilon_1$. Tomamos então um ϵ_2 tal que $0 < \epsilon_2 < \frac{\delta_1}{3}$ e seja $h_2 = f_1 + g$ *em* C_2. Como h_2 é contínua em C_2, há uma coleção finita $\bigcup_2$ de intervalos abertos, cujos extremos são disjuntos aos pares, que cobre C_2 de forma que x e y estão em $O_{2i} \in \bigcup_2$ para algum i, então $|h_2(x) - h_2(y)| < \epsilon_2$. Seja V_2 a coleção de intervalos abertos em $\bigcup_2$ que contém valores de x que satisfazem $h_2(x) = \frac{1}{2}$. Definimos $f_2(x) = \epsilon_2$ para os valores de x em V_1 e $f_1(x) = 0$ para valores de x que estão em $\bigcup_2$ mas não em V_2. Assim, temos que $(f_2 + h_2)$ é contínua em C_2 e $(f_2 + h_2(x) \neq \frac{1}{2}$ para todo $x \in C_2$.

Repetimos o processo indefinidamente, de modo que para C_n, a soma das funções difere de $\frac{1}{2}$. Dessa forma, $(g + f)$ não possui a PVI.

Referências

1. D.A.Neuser, S.G.Wayment, *A Note on the Intermediate Value Property*, The American Mathematical Monthly, 81:9, 995-997, 1974.
2. Lima, Elon Lages, *Curso de análise; v.1.* 1ed Rio de Janeiro: IMPA, 2014.
3. Moura, E.C., Santos, E.R., *Conjunto de Cantor: um conjunto no enumerável com medida de Lebesgue zero* 31 Colóquio Brasileiro de Matemática IMPA, Rio de Janeiro, 30 de Julho de 2017 a 05 de Agosto de 2017

1.yasmin.ferreira@urca.br,
2.flavio.franca@urca.br