A Esfera Osculatriz

Yasmin Ferreira Carlos
Flávio França Cruz

1 Introdução

O trabalho tratará da Esfera Osculatriz de uma curva espacial. Vamos a presentar a definição, exibir propriedades importantes e demonstrar que a esfera osculatriz de uma curva α possui contato de ordem ≥ 3 com α.

2 Preliminares

Inicialmente vamos apresentar algumas definições importantes.

Definição 1. Uma curva parametrizada diferenciável no $\mathbf{R}^3$ é uma aplicação diferenciável, de classe C^∞, $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$. Chamamos $t \in I$ de parâmetro da curva. A imagem de α é chamada de *traço* de α.

A função comprimento de arco da curva α é definida por

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} ||\alpha'(\tau)||d\tau.$$

Dados $\alpha : I \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3$ e $h : J \mapsto I$ tal que h' não se anule. A composta $\beta = \alpha \circ h : J \mapsto \mathbb{R}^3$ é chamada reparametrização de α e h é dita função mudança de parâmetro. Quando h é a inversa da função comprimento de arco, dizemos a curva está parametrizada pelo comprimento de arco (p.p.c.a). Neste caso,

$$\int_{t_1}^{t_2} |\beta'(s)| = t_2 - t_1. \tag{1}$$

A curvatura de α é a função definida por

$$\kappa(s) = ||\alpha''(s)||$$

.

Associamos a uma curva $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to R^3$, parametrizada pelo comprimento de arco e com curvatura não-nula, uma base ortonormal positiva, $(t(s), \eta(s), b(s))$ para cada $s \in I$, chamada de Triedro de Frenet, em que $t(s) = \alpha'(s)$ é o vetor tangente A α. Chamamos $\eta(s)$ de vetor normal e $b(s)$ de binormal. Precisamente,

$$t(s) = \alpha'(s), \tag{2}$$

$$\eta(s) = \frac{1}{\kappa(s)}\alpha''(s), \tag{3}$$

$$b(s) = t(s) \times \eta(s). \tag{4}$$

O raio de curvatura ρ de α que é o inverso da curvatura

$$\rho(s) = \frac{1}{\kappa(s)}.$$

2.0.1 Fórmulas de Frenet

As fórmulas de Frenet determinam as derivadas de cada coordenada do triedro de Frenet (t, η, b), relacionando-as com outras relações já construídas entre (t, η, b):

$$t' = \kappa\eta, \tag{5}$$

$$\eta' = -\kappa t - \tau b, \tag{6}$$

$$b' = \tau\eta, \tag{7}$$

em que τ é a torção de α, definida por

$$\tau(s) = \langle b'(s), \eta(s) \rangle \tag{8}$$

2.0.2 Contato de curvas e a Esfera Osculatriz

Nesta seção abordaremos a noção de contato de entre curvas.

Definição 3. Dadas as curvas $\alpha : I \mapsto \mathbf{R}^3$ e $\beta : \bar{I} \mapsto \mathbf{R}^3$ regulares, tais que $\alpha(s_o) = \beta(s_o)$, $s_0 \in \ I \cap \bar{I}$. Dizemos que α e β têm contato de ordem $\geq n$ em s_0, $n \in \mathbb{N}$, se todas as derivadas de α e β em s_o até ordem n são iguais.

A reta tangente a α em s_0 tem contato de ordem ≥ 1 com α em s_0. O círculo osculador de α em s_0 possui contato de ordem ≥ 2 com α em s_0.

Podemos definir o contato entre curvas no $\mathbf{R}^3$ e planos e esferas. Em geral, podemos definir o contato entre uma curva α e uma superfície S do $\mathbb{R}^3$.

Definição 4. Dizemos que a curva $\alpha : I \mapsto \mathbf{R}^3$ e a superfície S têm contato de ordem $\geq n$ em s_0, $n \in \mathbb{N}$, se existir uma curva $\beta : \bar{I} \mapsto S \subset \mathbf{R}^3$ em S tal que α e β tem contato de oredem $\geq n$ em s_0.

O plano osculador de $alpha$ em s_0 possui contato de ordem ≥ 1 com α em s_0.

A esfera osculatriz de α em s_0 é a esfera de raio

$$R(s_o) = \sqrt{\rho(s_o) + \left(\frac{\rho'(s_o)}{\tau'(s_o)}\right)^2}, \tag{9}$$

e centro

$$C(s_o) = \alpha(s_o) + \rho(s_o)\eta(s_o) + \frac{\rho'(s_o)}{\tau(s_o)}b(s_o). \tag{10}$$

Vamos mostrar que a esfera osculatriz de α em s_0 tem contato de ordem ≥ 3 com α em s_o. De fato, mostraremos que a esfera osculatriz é a única esfera que tem ordem de contato ≥ 3 com $alpha$.

3 Objetivo

O trabalho objetiva demonstrar as seguintes propriedades da esfera osculatriz.

a) Se S é uma esfera que tem contato de ordem ≥ 1 com α em s_o, então o centro de S pertence ao plano normal de α em s_o.

b) Se S é uma esfera que tem contato de ordem ≥ 2 com α em s_o, então o centro de S pertence à reta que passa pelo centro de curvatura de α em s_o na direção do vetor binormal $b(s_o)$.

c) Uma esfera que tem contato de ordem ≥ 2 com α em s_o intercepta o plano osculador de α em s_o ao longo do círculo osculador em s_o.

d) A esfera osculatriz de α em s_o é a única esfera que tem contato de ordem ≥ 3 com α em s_o.

4 Metodologia

O trabalho foi realizado por meio da pesquisa bibliográfica, estudo individual e seminários.

5 Referências

(1) Teixeira, A.F.F. *Curvaturas e torções, sem maiores pretensões*, Monografia, CBPF, v.3, n.1, p.1-15, 2017.

(2) Eisenhart, L.P. *A treatise on the differential geometry of curves and surfaces.* 1. ed. - Boston, New York, Chigado, London: Ginn and Company, 1909.

(3) Tenenblat, K. *Introdução à geometria diferencial.* 2. ed. revisada - São Paulo: Blucher, 2008.