FLUXO DE CALOR EM UM FIO

Matheus Evangelista Vieira[1] *& Ricardo Rodrigues de Carvalho*[2]

Resumo

Neste trabalho apresentaremos a modelagem matemática para a variação da temperatura ao longo de um fio metálico. Este fenômeno físico foi estudado pela primeira vez pelo matemático francês Joseph Fourier no século XIX. Para esse estudo, faremos as seguintes considerações:

(I) Consideramos um fio metálico fino;

(II) A seção transversal do fio possui área constante σ;

(III) A densidade ρ do material é constante;

(IV) A superfície lateral do fio está isolada termicamente a ponto de não permitir troca de calor com o ambiente.

Denotando por $u(x,t)$ a temperatura da seção do fio no ponto x e no instante t, considerando a equação fundamental da calorímetria e a lei de Fourier para transferência de calor, obtemos:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \qquad (*)$$

onde a denota uma constante que depende da densidade e condutividade térmica do fio metálico. A equação $(*)$ é conhecida como "equação do calor".

Palavras-chave : Equação do calor, Lei de Fourier.

HEAT FLOW IN A WIRE

Abstract

In this work we will present the mathematical modeling for the variation of the temperature alog a matallic wire. This physical phenomen was first studied by the french mathematician Joseph Fourier in the nineteenth century. For this study, we will make the following considerations:

(I) We consider a thin metal wire;

(II) The cross section of the wire has constant area σ;

(III) The density ρ of the material is constant;

(IV) The side surface of the wire is thermally insulated to the point of not allowing heat exchange with the environment.

Denoting by $u(x,t)$ the temperature of the section of the wire at the point x and time t, considering the fundamental equation of the calorimetry and the Fourier law for the heat transfer, we obtain:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \qquad (*)$$

where a denotes a constant that depends on the density and thermal conductivity of the wire. The equation $(*)$ is known as the "heat equation".

Keywords: Heat Equation, Fourier Law.

[1]Matemática/URCA - Matheus Evangelista Vieira (PIBIC - URCA). e-mail: matheus.evangelista099@hotmail.com

[2]Matemática/URCA - Ricardo Rodrigues de Carvalho. e-mail: ricardo.carvalho@urca.br.

1 Introdução

O surgimento da teoria do cálculo diferencial e integral em meados do século XVI, e sua formulação definitiva por Newton e Leibniz no século XVII, possibilitou o estudo de muitos fenômenos físicos. O fenômeno físico do fluxo de calor através de um fio metálico foi analisado pela primeira vez pelo matemático francês Joseph Fourier no século XIX. Foi no estudo desse fenômeno que surgiu a teoria das séries de Fourier que é uma ferramenta matemática imprescindível no estudo de diversos fenômenos físicos. No presente trabalho, faremos apenas a modelagem do fenômeno do fluxo de calor através de um fio metálico. Para uma abordagem mais completa, isto é, análise da solução do problema modelado, recomendamos ao leitor as referências bibliográficas [1] e [2].

2 Objetivos

Modelagem do fenômeno físico do fluxo de calor em um fio.

3 Preliminares

Para o estudo que se pretende fazer aqui necessitaremos, como pré-requisito, do curso de Cálculo Diferencial e Integral III.

4 Fluxo de calor em um fio

Iniciaremos considerando um fio suficientemente fino, metálico e cilíndrico, com as seguintes suposições:

(I) A área da seção transversal é constante e igual a σ;

(II) A densidade ρ do material será considerada constante ;

(III) O calor específico do material será denotado por c.

Vamos denotar por $u(x,t)$ a temperatura da seção do fio no ponto x e no instante t. Aqui assumiremos que $u(x,t)$ é de classe C^2 em relação a x e classe C^1 em relação a t.

Inicialmente pretendemos determinar a quantidade de calor $Q(t)$ no segmento $[x, x+\Delta x]$ do fio, no instante t. Para isso, consideramos uma partição do intervalo $[x, x+\Delta x]$ de tal modo que $x = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = x + \Delta x$. Agora, e ultilizando a equação fundamental da calorimetria, obtemos um valor aproximado para a quantidade de calor $Q_i(t)$ em um subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ dessa partição, no instante t, dado por

$$Q_i(t) = \sigma\rho c(x_i - x_{i-1})u(\xi_i, t),$$

sendo ξ_i um ponto qualquer no intervalo (x_{i-1}, x_i). Portanto, podemos concluir que a quantidade de calor $Q(t)$ no segmento $[x, x+\Delta x]$ será, aproximadamente,

$$Q(t) \simeq \sum_{i=1}^{n} \sigma\rho c(x_i - x_{i-1})u(\xi_i, t).$$

Sendo assim, obtemos que a quantidade de calor $Q(t)$ no segmento $[x, x+\Delta x]$, no instante t, será

$$Q(t) = \lim_{||\Delta||\to 0} \sum_{i=1}^{n} \sigma\rho c(x_i - x_{i-1})u(\xi_i, t), \tag{1}$$

sendo $\| \Delta \| = max\{(x_i - x_{i-1}), i = 1, ..., n\}$.

Devido as hipóteses assumidas para a função u decorre de (1) que

$$Q(t) = \int_x^{x+\Delta x} \sigma\rho c u(\xi, t) d\xi. \qquad (2)$$

Pela lei de Fourier, concluimos que o calor flui através da seção reta em x por

$$-k\sigma\frac{\partial u}{\partial x}(x, t),$$

onde k será a constante de condutividade térmica do material. O mesmo se vale para o ponto $x + \Delta x$, isto é, o calor flui através da seção reta em $x + \Delta x$ por

$$-k\sigma\frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t).$$

Sabendo que a taxa de variação da quantidade de calor no segmento $[x, x + \Delta x]$ é igual a diferença do calor que flui no ponto x e o que flui no ponto $x + \Delta x$, obtemos:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = k\sigma\left[\frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) - \frac{\partial u}{\partial t}(x, t)\right]. \qquad (3)$$

Portanto, decorre de (2), (3) e do teorema de Leibniz que

$$\int_x^{x+\Delta x} \rho\sigma c\frac{\partial u}{\partial t}(\xi, t) d\xi = k\sigma\left[\frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)\right]. \qquad (4)$$

Finalmente dividindo ambos os membros da igualdade (4) por Δx e aplicando o limite com $\Delta x \longrightarrow 0$, obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

para todo ponto x do fio, com $a^2 = \frac{k}{\rho c}$.

Agora vamos supor duas situações que podem ocorrer. A primeira é que em todo ponto do fio exista uma fonte externa de calor com intensidade igual a $f(x, t)$. Considerando essa função contínua, então a quantidade de calor no segmento $[x, x + \Delta x]$ do fio, será dada por

$$\int_x^{x+\Delta x} f(\xi, t) d\xi.$$

Sendo assim, e repitindo o raciocínio adotado anteriormente, obtemos:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t), \qquad (5)$$

para todo x do fio, no instante t, sendo $F = \frac{1}{\rho c\sigma}f$.

A outra situação seria considerar que haja perda de calor proporcional à temperatura $u(x, t)$ em todos os pontos x do fio, no instante t. Com isso obteremos a equação

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - ku, \qquad (6),$$

denominada equação de radiação (k constante).

A equação final conterá as Eqs. (5) e (6), tal que

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t) - ku,$$

em todo ponto x do fio, no instante t.

5 REFERÊNCIAS

[1] Figueiredo, D. G., Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais, CNPq - IMPA, Rio de Janeiro, 1977.

[2] Medeiros, L. A. e Andrade, N. G., Iniciação às Equações Diferenciais Parciais, LTC, Rio de Janeiro, 1978.