Equação Diferencial das Pequenas Oscilações de uma Corda

Ricardo Souza e Silva [1] *& Ricardo Rodrigues de Carvalho* [2]

Resumo

No presente trabalho, realizaremos a modelagem da equação da onda a partir do movimento de oscilação de uma corda fina e flexível. Para esse estudo, faremos as seguintes considerações:

1. Consideramos pequenas oscilações transversais, isto é, cada elemento da corda se desloca perpendicularmente ao eixo da abscissa.
2. Nenhuma força de atrito será considerada.
3. A intensidade das forças gravitacionais são desprezíveis quando comparadas com as tensões na corda.
4. As amplitudes das oscilações e suas derivadas são pequenas, de modo que seus quadrados e produtos não são considerados nos cálculos quando comparados com a unidade.

Denotando por $u(x,t)$ o deslocamento de cada ponto x da corda no instante t, considerando as forças que atuam sobre a corda e o princípio de d'Alembert, obtemos

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p(x,t), \tag{$*$}$$

onde $\rho(x)$ é a densidade linear da corda, T_0 é a tensão a qual a corda está submetida na posição de equilíbrio e $p(x,t)$ a distribuição de forças externas atuando sobre a corda. A equação $(*)$ é conhecida como "Equação da Onda".

Palavras-chave : Equação da Onda, Princípio de d'Alembert.

Differential Equation of the Small Oscillations of a String

Abstract

In the present work, we will perform the modeling of the wave equation from the oscillation movement of a thin and flexible string. For this study, we will make the following considerations:

1. We consider small transverse oscillations, that is, each element of the string moves perpendicular to the axis of the abscissa.
2. No frictional force will be considered.
3. The intensity of the gravitational forces are negligible when compared to the tensions in the string.
4. The amplitudes of the oscillations and their derivatives are small, so that their squares and products are not considered in the calculations when compared to the unit.

Denoting by $u(x,t)$ the displacement of each point x of the string in the instant t, considering the forces acting on the string and the principle of d'Alembert, we obtain

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p(x,t), \tag{$*$}$$

[1]Matemática/URCA - Ricardo Souza e Silva (PIBIC-URCA). e-mail: ricardosilvabdc3@gmail.com
[2]Matemática/URCA - Ricardo Rodrigues de Carvalho. e-mail: ricardo.carvalho@urca.br

where $\rho(x)$ is the linear density of the string, T_0 is the tension to which the string is subjected in the equilibrium position and $p(x,t)$ the distribution of external forces acting on the string. The equation $(*)$ is known as "Wave Equation".

Keywords: Wave Equation, Principle of d'Alembert.

1 Introdução

A partir da concretização da teoria do cálculo diferencial e integral no século XVII, se inicia o estudo das equações diferenciais. Uma das primeiras equações diferenciais parciais a surgir nos estudos dos matemátcos do século XVIII, a partir da modelagem de um fenômeno físico, foi a equação da onda. No presente trabalho, faremos a modelagem da equação da onda considerando o movimento de oscilação de uma corda, sendo que esta é tratada como um fio fino e flexível.

2 Objetivos

Nesse trabalho iremos realizar a modelagem do fenômeno físico da oscilação de uma corda.

3 Preliminares

Podemos estabelecer como pré-requisitos para a leitura desse trabalho apenas o cálculo diferencial e integral de uma e de várias variáveis, a segunda Lei de Newton entre outros conhecimentos de Física.

4 Equação Diferencial das Pequenas Oscilações de uma Corda

Suponha inicialmente que, em estado de equilíbrio, a corda coincida com o eixo dos x tendo como origem o ponto 0 do plano $\mathbb{R}^2$. Representaremos por $u(x,t)$ o deslocamento de cada ponto x da corda no instante t a partir de sua posição de equilíbrio. Considere ainda que:

1. Todas as forças de atrito, tanto internas como externas, não serão consideradas.
2. A intensidade das forças gravitacionais é pequena quando comparadas com as tensões na corda.
3. As amplitudes $u(x,t)$ das oscilações e suas derivadas são pequenas, de modo que seus quadrados e produtos não são considerados nos cálculos quando comparados com a unidade.

Fixado o tempo t vamos assumir a seguinte situação representada na figura 1, em que o segmento $\overline{x_1x_2}$ se deformou no arco de curva $\widehat{M_1M_2}$.

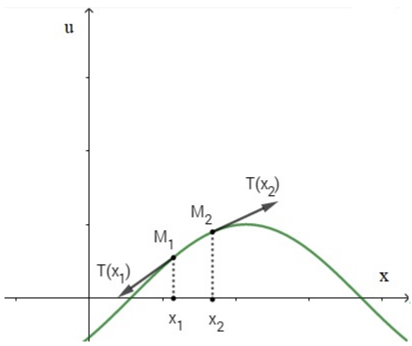

Figura 1

Observe que podemos decompor as forças de tensão $T(x_1)$ e $T(x_2)$ em duas componentes, uma horizontal e a outra vertical, que denotaremos, respectivamente, por H e V.

Seja ainda α o ângulo agudo que a direção T faz com o eixo dos x, no instante t. A partir disso tem-se:

$$H_1(x_1) = T(x_1)\cos\alpha(x_1) \quad e \quad V_1(x_1) = T(x_1)\,\text{sen}\alpha(x_1),$$
$$H_2(x_2) = T(x_2)\cos\alpha(x_2) \quad e \quad V_2(x_2) = T(x_2)\,\text{sen}\alpha(x_2).$$

Do cálculo, sabemos que o comprimento do arco $\widehat{M_1M_2}$ é dado por

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} dx.$$

Pela hipótese (3) tem-se

$$s \approx x_2 - x_1,$$

ou seja, considera-se $s = x_2 - x_1$. Assim, quando se estudam pequenas oscilações, não há variação do comprimento do segmento $\overline{x_1x_2}$. Daí, pela Lei de Hooke, pode-se concluir que a intensidade da tensão T, em cada ponto, não varia com o tempo, e, portanto, não é levada em conta em presença da tensão de equilíbrio inicial. Denotaremos essa tensão por T_0.

É possível mostrar, também, que a tensão T pode ser tomada como independente de x, isto é, pode-se considerá-la igual à tensão T_0. De fato, tem-se as seguintes forças atuando sobre o arco da curva:

a) as tensões M_1 e M_2 tangenciais à corda;

b) as forças externas, caso existam;

c) as forças de inércia.

Por hipótese, o movimento é na direção u, deste modo as forças externas e de inércia que atuam em direção a x não contribuem para o movimento, pois são perpendiculares. Assim, deduz-se que o arco $\widehat{M_1M_2}$ não possui aceleração na direção x, ou seja, $F_r = 0$, onde F_r denota a resultante das forças na direção do eixo x. Daí

$$T(x_2)\cos\alpha(x_2) = T(x_1)\cos\alpha(x_1). \tag{1}$$

Como as oscilações são pequenas temos

$$\begin{aligned} \cos\alpha(x) &= \frac{1}{\frac{1}{\cos\alpha(x)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha(x)}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\frac{\text{sen}^2\alpha(x) + \cos^2\alpha(x)}{\cos^2\alpha(x)}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\text{tg}^2\alpha(x) + 1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1}} \approx 1. \end{aligned} \tag{2}$$

Segue de (1) e (2) que $T(x_2) \approx T(x_1)$ para quaisquer que sejam x_1 e x_2 da corda. Assim, T não depende de x e será identificada como T_0 para todo x e t.

Calculemos agora as forças que atuam na direção u.

1) *Resultante das tensões na direção u:* Note que

$$F_1 = T_0[\,\text{sen}\alpha(x_2) - \text{sen}\alpha(x_1)].$$

Como

$$\begin{aligned}\text{sen}\alpha(x) &= \frac{\dfrac{\text{sen}\alpha(x)}{\cos\alpha(x)}}{\dfrac{1}{\cos\alpha(x)}} \\ &= \frac{\text{tg}\alpha(x)}{\sqrt{\text{tg}^2\alpha(x)+1}} \\ &= \frac{\dfrac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+1}} \approx \frac{\partial u}{\partial x},\end{aligned}$$

conclui-se que

$$F_1 = T_0\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_1}\right] = T_0\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Bigg|_{x_1}^{x_2} = T_0\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Portanto,

$$F_1 = T_0\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx, \tag{3}$$

onde estamos assumindo que u é de classe C^2 na variável x.

2) *Forças externas:* Representamos por $p(x,t)$ a distribuição de forças externas por unidade de comprimento atuando sobre a corda, na direção u. Aqui, assumiremos que $p(x,t)$ é uma função contínua.

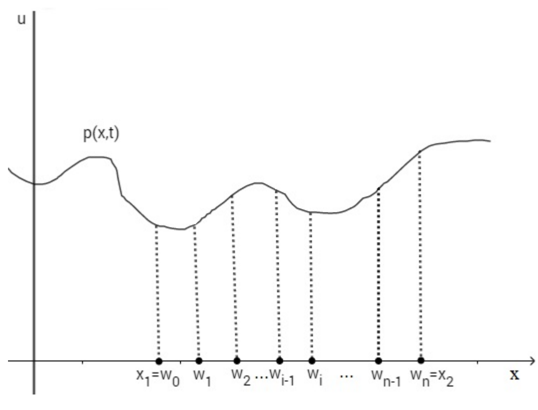

Figura 2

Seja $[x_1, x_2]$ um intervalo qualquer do eixo x e

$$P : x_1 = w_0 < w_1 < ... < w_{i-1} < w_i < ... < w_n = x_2,$$

uma partição. Para cada subintervalo $[w_{i-1}, w_i]$, existe um $c_i \in [w_{i-1}, w_i]$ tal que $p(c_i, t)$ representa a força externa sobre a corda nesse intervalo cuja amplitude denotaremos por

$\Delta w_i = w_i - w_{i-1}$, para $i = 1, ..., n$. Aproximadamente, a força externa sobre a corda será dada por

$$\sum_{i=1}^{n} p(c_i, t)\Delta w_i.$$

Fazendo o $\max\limits_{1\leq i\leq n} \Delta w_i \to 0$, resulta que

$$\lim_{\max\limits_{1\leq i\leq n} \Delta w_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} p(c_i, t)\Delta w_i = \int_{x_1}^{x_2} p(x, t)dx.$$

Logo, a força externa sobre a corda será

$$F_2 = \int_{x_1}^{x_2} p(x, t)dx. \tag{4}$$

3) *Forças de inércia:* Seja $\rho(x)$ a densidade linear da corda. Considere uma partição

$$P : x_1 = w_0 < w_1 < ... < w_{i-1} < w_i < ... < w_n = x_2,$$

do intervalo $[x_1, x_2]$. Para cada subintervalo $[w_{i-1}, w_i]$ de tamanho $\Delta w_i = w_i - w_{i-1}$, $i = 1, ..., n$, temos que sua massa é dada aproximadamente por $m = \rho(c_i)\Delta w_i$ onde $c_i \in (w_{i-1}, w_i)$. Como a aceleração é igual a derivada segunda da posição em relação ao tempo, resulta que a força em dada subintervalo é dada por

$$F_i = \rho(c_i)\Delta w_i \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

e, aproximadamente, a força de inércia que atua sobre a corda será

$$\sum_{i=1}^{n} \rho(c_i)\Delta w_i \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Fazendo o $\max\limits_{1\leq i\leq n} \Delta w_i \to 0$, resulta que

$$\lim_{\max\limits_{1\leq i\leq n} \Delta w_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(c_i)\Delta w_i \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dx,$$

onde estamos assumindo que u é de classe C^2 na variável t.

Portanto, a força de inércia no intervalo sobre o arco $\widehat{M_1M_2}$ será dada por

$$F_3 = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dx. \tag{5}$$

Agora recordemos o princípio de d'Alembert, que diz: "Num sistema material em movimento, as forças nele aplicadas e as forças de inércia se equilibram". Sendo assim, segue de (3), (4) e (5) que

$$F_1 + F_2 = F_3,$$

ou seja,

$$\int_{x_1}^{x_2} T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx + \int_{x_1}^{x_2} p(x, t)dx = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{6}$$

quaisquer que sejam $x_1,\ x_2$ e $t \geq 0$. Portanto, decorre de (6) que

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + p(x,t) \right] dx = 0.$$

Notando que o integrando é uma função contínua temos

$$T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + p(x,t) = 0.$$

Esta última equação é a equação diferencial de pequenas oscilações de uma corda flexível, sob a ação de uma força externa $p(x,t)$. Note ainda que, se a corda é uniforme, então $\rho(x)$ é constante e, sendo assim, denotaremos $\rho(x)$ apenas por ρ. Daí tem-se

$$T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p(x,t) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

ou ainda,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x,t), \tag{7}$$

onde $a = \sqrt{\dfrac{T_0}{\rho}}$ e $F(x,t) = \dfrac{p(x,t)}{\rho}$.

Quando não existe forças externas, ou seja, quando $F(x,t) = 0$, então resulta de (7) a equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{8}$$

5 Referências

[1] Figueiredo, D. G., Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais, CNPq-IMPA, Rio de Janeiro, 1977.

[2] Medeiros, L. A. e Andrade, N. G., Iniciação às Equações Diferenciais Parciais, LTC, Rio de Janeiro, 1978.