AS FÓRMULAS DE MINKOWSKI E UMA APLICAÇÃO

Natália das Neves Lucas[1] *e Flávio França Cruz*[2]

Resumo

Neste trabalho, faremos uma demonstração das fórmulas integrais de Minkowski para superfícies compactas em $\mathbb{R}^3$. O estudo foi realizado fazendo uso do livro “Análises Geométrico y Geometría Global das Superfícies: Una Introducción Elementar”, do autor Luis Alías. Para obtenção dos objetivos definidos, serão apresentados os pré-requisitos de cálculo diferencial em superfícies, especificamente, abordaremos os operadores gradiente, laplaciano, divergente e hessiano. Em seguida, mostraremos uma aplicação das fórmulas de Minkowski na demonstração do clássico Teorema de Liebmann que caracteriza as esferas $\mathbb{S}^2$ como as únicas superfícies regulares compactas no $\mathbb{R}^3$ com curvatura de Gauss constante.

Palavras-chave : Fórmulas de Minkowski, Teorema de Liebmann, superfície regular.

The Minkowiski formulas and an application

Abstract

In this work, we will demonstrate the integral formulas of Minkowski for compact surfaces in $\mathbb{R}^3$. The study was carried out using the book “Análises Geométrico y Geometría Global das Superfícies: Una Introducción Elementar”, by author Luis Alías. To obtain the defined objectives, will be presented the pre-requisites of differential calculus in surfaces , specifically, operators gradient, laplacian, divergent and hessian. Then we will show an application of the Minkowski formulas in the demonstration of the classic Liebmann's Theorem which characterizes the spheres $\mathbb{S}^2$ as the only regular compact surfaces in $\mathbb{R}^3$ with constant Gauss curvature.

Keywords: Minkowski's formulas, Liebmann's theorem, regular surface.

[1]Licenciatura em Matemática/URCA - PIBIC/FUNCAP. E-mail: nataliiamaria@hotmail.com
[2]DEMPA/URCA. E-mail: flavio.franca@urca.br

1 Introdução

Inicialmente, apresentaremos uma demonstração para as fórmulas de Minkowski, que são duas fórmulas integrais clássicas para superfícies compactas em $\mathbb{R}^3$ e como muitas das fórmulas integrais importantes na geometria diferencial, se obtêm como uma aplicação do teorema da divergência.

As fórmulas integrais de Minkowski tiveram aplicações de suma importância na demonstração de diversos teoremas sobre as superfícies regulares compactas, entre eles: no teorema de Alexandrov, teorema de Liebmann e no teorema de Reilly.

De modo natural, a partir desse resultado faremos a demonstração do teorema clássico da rigidez de Liebmann, o qual caracteriza as esferas $\mathbb{S}^2(r) \subset \mathbb{R}^3$ como as únicas superfícies regulares compactas com curvatura de Gauss constante em $\mathbb{R}^3$.

2 Objetivos

Apresentar uma demonstração para as fórmulas de Minkowski e uma de suas aplicações na demonstração do teorema clássico da rigidez de Liebmann, que caracteriza as esferas $\mathbb{S}^2(r) \subset \mathbb{R}^3$ como as únicas superfícies regulares compactas com curvatura de Gauss constante em $\mathbb{R}^3$.

3 Metodologia

O método usado para elaboração desse trabalho, foram estudos individuais de pesquisa e participação nos seminários em grupos de Geometria Diferencial. Nos seminários foi abordado a teoria clássica da geometria de superfícies regulares no espaço Euclidiano, utilizando o livro Introdução à Geometria Diferencial, do autor Ronaldo Freire de Lima.

4 Preliminares

O símbolo $S \subset \mathbb{R}^3$ denotará uma superfície regular do espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$. Suponhamos que a superfície é orientável e seja N sua aplicação de Gauss. Isto é, N é um campo normal unitário definido sobre a superfície, de modo que, para cada ponto $p \in S$, o plano tangente

$$T_pS = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^3 : \langle \vec{v}, N(p) \rangle = 0\}.$$

A aplicação $A_p : T_pS \to T_pS$ definida por

$$A_p(\vec{v}) = -dN_p(\vec{v})$$

chama-se o endomorfismo (ou o operador) de Weingarten.

O operador de Weingarten é auto-adjunto (com respeito à primeira forma fundamental). O traço de A_p define a curvatura média da superfície, denotada por H,

$$H(p) = \frac{1}{2}tr(A_p) = \frac{k_1(p) + k_2(p)}{2},$$

e o determinante de A_p define a curvatura de Gauss, denotada por K,

$$K(p) = det(A_p) = k_1(p)k_2(p),$$

onde $k_1(p)$ e $k_2(p)$, definem as curvaturas principais da superfície no ponto p. Iremos assumir aqui os seguintes resultados.

Lema 1. *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular. Para todo ponto $p \in S$ tem-se que*

$$H^2(p) \geq K(p)$$

e a igualdade ocorre se, e somente se, p é um ponto umbílico.

A proposição abaixo é uma consequência direta do critério da derivada segunda para pontos de máximo.

Proposição 1. *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e orientada.*

1. *Se S é localmente convexa em um ponto $p_0 \in S$, então a curvatura de Gauss neste ponto deve ser maior ou igual que 0, $K(p_0) \geq 0$.*
2. *Se $p_0 \in S$ é um ponto elíptico de S ($K(p_0) > 0$), então S é estritamente localmente convexa em p_0.*

O resultado acima e a hípotese de compacidade nos permite concluir o seguinte

Teorema 1. *Toda superfície regular, orientada e compacta $S \subset \mathbb{R}^3$ tem ao menos um ponto elíptico.*

Teorema 2. *(Teorema de Hadamard) Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ um ovaloide. Então,*

1. *A aplicação de Gauss $N : S \to \mathbb{S}^2$ é um difeomorfismo,*
2. *S é estritamente globalmente convexa em todos seus pontos.*

Finalmente, enunciamos a principal ferramenta utilizada na demonstração das Fórmulas de Minkowiski.

Teorema 3. *(Teorema da Divergência) Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular, compacta e orientada, e seja $X \in \chi(S)$ um campo de vetores tangentes sobre S. Então,*

$$\int_S divX(p)dS = 0$$

onde dS denota o elemento de área da superfície S. Em particular,

$$\int_S \Delta f(p)dS = 0$$

para toda função $f \in C^\infty(S)$.

5 Resultados

Teorema 4. *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular, compacta e orientada, com aplicação de Gauss N. Para cada ponto fixo $c \in \mathbb{R}^3$ tem-se*

$$\int_S (1 + H(p)\langle p - c, N(p)\rangle)dp = 0, \tag{1}$$

e

$$\int_S (H(p) + K(p)\langle p - c, N(p)\rangle)dp = 0, \tag{2}$$

onde, H é a curvatura média e K a curvatura de Gauss de S.

Nos referiremos a (1) e a (2) como a primeira e a segunda fórmula de Minkowski, respectivamente.

Demonstração: Fixado o ponto $c \in \mathbb{R}^3$, consideremos a função diferenciável sobre S definida por $f(p) = \frac{1}{2}|p - c|^2$. Sabemos que

$$\begin{aligned}\nabla f(p) &= GradF(p) - \langle GradF(p), N(p)\rangle N(p) \\ &= (p - c)^T = p - c - \langle p - c, N(p)\rangle N(p)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\nabla^2 f_p(\vec{v}, \vec{w}) &= \langle d(GradF)_p(\vec{v}), \vec{w}\rangle + \langle GradF(p), N(p)\rangle\langle A_p(\vec{v}), \vec{w}\rangle \\ &= \langle \vec{v}, \vec{w}\rangle + \langle A_p(\vec{v}), \vec{w}\rangle\langle p - c, N(p)\rangle\end{aligned}$$

onde $f = F|_S$ e F é uma função diferenciável definida sobre um aberto W de $\mathbb{R}^3$. Então, o hessiano de f em um ponto $p \in S$ é dado por

$$\nabla^2 f_p(\ \vec{v},\ \vec{v}) = 1 + k(\ \vec{v})\langle p - c, N(p)\rangle$$

para toda direção $\vec{v} \in T_pS$. Assim, tomando $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ a base de direções principais de S em p tem-se que

$$\Delta f(p) = tr(\nabla^2 f)(p) = (1 + k_1(p)\langle p - c, N(p)\rangle) + (1 + k_2(p)\langle p - c, N(p)\rangle).$$

Assim

$$\Delta f(p) = 2 + 2H(p)\langle p - c, N(p)\rangle. \tag{3}$$

Pelo Teorema da Divergência,

$$\int_S \Delta f(p)dp = 0$$

Logo, a fómula (1) se obtem pelo teorema da divergência, integrando a igualdade (3).

Para demonstrar a segunda fórmula de Minkowski, precisamos calcular o laplaciano da função $g \in C^\infty(S)$ definida por $g(p) = \langle p - c, N(p)\rangle$. Para cada $p \in S$ e $\vec{v} \in T_pS$ teremos

$$\begin{aligned}\vec{v}(g) &= dg(\vec{v}) = \langle \nabla g, \vec{v}\rangle \\ &= \langle \vec{v}, N(p)\rangle + \langle p - c, dN_p(\vec{v})\rangle \\ &= -\langle (p - c)^T, A_p(\vec{v})\rangle = -\langle A_p((p - c)^T), \vec{v}\rangle\end{aligned}$$

de modo que o gradiente de g vem dado por $\nabla g(p) = -A_p((p-c)^T) = -A_p(\nabla f(p))$. Portanto, para cada $\vec{v} \in T_pS$ o

$$\nabla_{\vec{v}} \nabla g = -\nabla_{\vec{v}}(A(\nabla f)) = -(\nabla_{\vec{v}} A)(\nabla f(p)) - A_p(\nabla_{\vec{v}} \nabla f)$$

onde $\nabla_{\vec{v}} A$ denota a derivada covariante de A com respeito a $\vec{v}$. Pela equação de Codazzi - Mainard podemos comutar os vetores $\vec{v}$ e $\nabla f(p)$ na derivada covariante de A e escrever

$$(\nabla_{\vec{v}} A)(\nabla f(p)) = (\nabla_{\nabla f(p)} A)(\vec{v})$$

Dessa forma, o hessiano de f, é dado por

$$\begin{aligned}
\nabla^2 g_p(\vec{v}, \vec{v}) &= -\langle (\nabla_{\nabla f(p)} A)(\vec{v}), \vec{v} \rangle - \langle A_p(\nabla_{\vec{v}} \nabla f), \vec{v} \rangle \\
&= -\langle (\nabla_{\nabla f(p)} A)(\vec{v}), \vec{v} \rangle - \langle \nabla_{\vec{v}} \nabla f, A_p(\vec{v}) \rangle \\
&= -\langle (\nabla_{\nabla f(p)} A)(\vec{v}), \vec{v} \rangle - \nabla^2 f_p(\vec{v}, A_p(\vec{v})) \\
&= -\langle (\nabla_{\nabla f(p)} A)(\vec{v}), \vec{v} \rangle - \langle A_p(\vec{v}), \vec{v} \rangle - \langle A_p(\vec{v}), A_p(\vec{v}) \rangle g(p).
\end{aligned}$$

Donde

$$\nabla^2 g_p(\vec{v}, \vec{v}) = -\langle (\nabla_{\nabla f(p)} A)(\vec{v}), \vec{v} \rangle - k(\vec{v}) - |A_p(\vec{v})|^2 g(p)$$

para toda direção $\vec{v} \in T_pS$. Se tomarmos agora $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ a base de direções principais de S em p, tem-se que

$$\nabla^2 g_p(\vec{e}_i, \vec{e}_i) = -\langle (\nabla_{\nabla f(p)} A)(\vec{e}_i), \vec{e}_i \rangle - k_i(p) - k_i^2(p) g(p).$$

Então, temos que

$$\begin{aligned}
\Delta g(p) &= \nabla^2 g_p(\vec{e}_1, \vec{e}_1) + \nabla^2 g_p(\vec{e}_2, \vec{e}_2) \\
&= -tr(\nabla_{\nabla f(p)} A) - (k_1(p) + k_2(p)) - (k_1^2(p) + k_2^2(p)) g(p) \\
&= -2\langle \nabla f(p), \nabla H(p) \rangle - 2H(p) - 2(2H^2(p) - K(p)) g(p)
\end{aligned}$$

já que,

$$tr(\nabla_{\nabla f(p)} A) = \langle \nabla f(p), \nabla (trA)(p) \rangle = 2\langle \nabla f(p), \nabla H(p) \rangle$$

e

$$\begin{aligned}
k_1^2(p) + k_2^2(p) &= (k_1(p) + k_2(p))^2 - 2k_1(p)k_2(p) \\
&= (2H(p))^2 - 2K(p) \\
&= 4H^2(p) - 2K(p).
\end{aligned}$$

Por outro lado, tem se também que

$$\begin{aligned}
2div(H\nabla f)(p) &= 2\langle \nabla f(p), \nabla H(p) \rangle + 2H(p)\Delta f(p) \\
&= 2\langle \nabla f(p), \nabla H(p) \rangle + 4H(p)(1 + H(p)g(p))
\end{aligned}$$

de forma que

$$div(2H\nabla f)(p) + \Delta g(p) = 2(H(p) + K(p)g(p)).$$

Então, a fórmula (2) se obtem pelo teorema da divergência, integrando esta igualdade. □

5.1 Aplicação

Teorema 5 (Teorema de Liebmann)**.** *Se uma superfície regular (conexa) e compacta $S \subset \mathbb{R}^3$ tem curvatura de Gauss constante K, então deve ser uma esfera de raio $r = \frac{1}{\sqrt{K}}$.*

Demonstração: A superfície compacta $S \subset \mathbb{R}^3$ é a fronteira de um domínio regular e compacto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ e podemos supor que S está orientada pelo campo normal unitário que aponta para o interior de Ω. Além disso, pelo teorema 1, sabemos que K é uma constante positiva e as curvaturas normais em cada ponto (com respeito ao normal interior) são positivas. Em particular, a curvatura média é positiva em todos os seus pontos, e pelo lema 1,

$$H^2(p) \geq K(p)$$
$$H(p) = \sqrt{K} > 0, \forall p \in S \tag{4}$$

onde a igualdade se da nos pontos umbilicos de S.

Como $K > 0$, S é um ovalóide, e assim, o teorema 2 garante que S é estritamente globalmente convexa em todos os seus pontos. Além disso, como $k(\vec{v}) > 0, \forall \vec{v} \in T_pS$ e para todo ponto $p \in S$ a prova da proposição 1 nos garante que, para cada ponto $p \in S$, o hessiano de h_p é definido positivo e a função h_p alcança em p um mínimo global estrito. Isto significa que, para cada ponto $p \in S$, tem-se $S - \{p\} \subset int(\Pi_p^+)$ e, por consequência $int(\Omega) \subset int(\Pi_p^+)$. Isto nos diz que

$$\langle x - p, N(p)\rangle > 0, \forall x \in int(\Omega), \forall p \in S.$$

Assim, se c é um ponto fixo do interior de Ω então $\langle c - p, N(p)\rangle > 0, \forall p \in S$. Se multiplicarmos a primeira fórmula de Minkowski pela constante positiva $\sqrt{K}$, temos

$$\int_S (\sqrt{K} + \sqrt{K}H(p)\langle p - c, N(p)\rangle)dp = 0.$$

Subtraindo está igualdade da segunda fórmula de Minkowski, tem-se

$$\int_S (H(p) + K(p)\langle p - c, N(p)\rangle)dp - \int_S (\sqrt{K} + \sqrt{K}H(p)\langle p - c, N(p)\rangle)dp = 0$$

$$\int_S ((H(p) + K(p)\langle p - c, N(p)\rangle) - (\sqrt{K} + \sqrt{K}H(p)\langle p - c, N(p)\rangle))dp = 0$$

$$\int_S ((H(p) - \sqrt{K}) + (K - \sqrt{K}H(p))\langle p - c, N(p)\rangle)dp = 0$$

$$\int_S ((H(p) - \sqrt{K}) + (1 + \sqrt{K}\langle c - p, N(p)\rangle)dp = 0$$

onde

$$1 + \sqrt{K}\langle c - p, N(p)\rangle > 0, \forall p \in S$$

Portanto, por (4) temos que $(H(p) - \sqrt{K}) + (1 + \sqrt{K}\langle c - p, N(p)\rangle) \geq 0$ em todos os pontos. Como a integral deve ser zero, o integrando também deve ser zero, e assim $H(p) = \sqrt{K}, \forall p \in S$ e então a superfície deve ser totalmente umbílica. Como as únicas superfícies totalmente umbílicas compactas são as esferas, concluímos que S é uma esfera.

□

6 Conclusão

O programa de Iniciação Científica tem uma grande contribuição para o bolsista, pois possibilita o estudo de temas mais avançados que não são vistos na graduação. Com a realização dos seminários em grupos e os trabalhos de pesquisas individuais se tornou possível alcançar o objetivo que se pretendia nesse trabalho, reproduzir uma demonstração para as fórmulas de Minkowski e a partir dela demonstrar o teorema clássico da rigidez de Liebmann.

7 REFERÊNCIAS

[1] Alías, Luis J. "Análisis Geométrico y Geometría Global de Superficies: Una Introducción Elemental". XIV Escola de Geometria Diferencial. IMPA (RJ). 2006.

[2] Lima, Ronaldo F. "Introdução à Geometria Diferencial". IV Colóquio de Matemática da Região Norte. SBM (RJ). 2016.

[3] López, Rafael. "Constant Mean Curvature Surfaces with Boundary". Springer-Verlag, 2013.