A Fórmula de Cauchy-Crofton

Paulo Vicente[1] *& Edinardo Oliveira*[2]

Resumo

O teorema o qual iremos trabalhar, nos diz que: Seja C uma C.P.R., *Curva Plana Regular*, de comprimento l. A medida do conjunto de retas que intersectam C é igual a $2l$. Más, antes de abordarmos o teorema devemos, primeiramente, definir o que vem a ser uma medida razoável a um conjunto de retas do plano. A ideia a princípio é de certa forma associar pontos $P = (x, y)$ pertencentes ao plano com retas $L= (\rho, \theta)$, onde ρ é o segmento de reta que mede a distância ortogonal da reta L a origem e θ é a inclinação da reta que contém ρ com o eixo das abscissas. Com isso fica evidente que nossa reta L terá sua equação da forma $xcos(\theta) + ysen(\theta) = \rho$. A partir daí, definiremos o nosso conjunto de retas como $\Gamma = \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 | \rho \geqslant 0, \theta \in [0, 2\pi)\}$. Existe uma medida razoável para este conjunto. Para isso, consideraremos Movimento Rígido $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ onde $x = a + \overline{x}cos(\phi) - \overline{y}sen(\phi)$ e $y = b + \overline{x}sen(\phi) + \overline{y}cos(\phi)$. E para definir a "área"de um conjunto $S \subset \mathbb{R}^2$ iremos considerar $\iint_S dxdy$ a fim de assimilarmos a integral $\iint_S d\rho d\theta$ onde ambas são invariantes por movimentos rígidos, o que é imprescíndivel para a demonstração deste resultado, onde faremos a abordagem em três casos; o caso onde nossa curva C é uma reta, uma poligonal e uma curva plana regular qualquer.

Palavras-chave : Curva Plana Regular, Movimento Rígido,Medida.

the Cauchy-Crofton Formula

Abstract

The theorem that comes to work tells us that: Let C be a R.F.C, *regular flat curve*,of lenght l. The measure of the set of lines that intersect C it's the same as $2l$.Rather, before we approach the theorem we must first define what is a reasonable measure to a set of straight lines of the plane.The idea at the beginning is in a way to associate points $P = (x, y)$ belonging to the straight plane $L= (\rho, \theta)$ at where ρ is the line segment that measures the orthogonal distance of the line L the origin and θ is the slope of the line containing ρ with the abscissa axis. This makes it clear that our line L will have its equation of the form $xcos(\theta) + ysen(\theta) = \rho$. From there we will, define our set of straight lines as $\Gamma = \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 | \rho \geqslant 0, \theta \in [0, 2\pi)\}$. There is a reasonable measure for this set. For this, we will consider Rigid Movement $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ at where $x = a + \overline{x}cos(\phi) - \overline{y}sen(\phi)$ and $y = b+\overline{x}sen(\phi)+\overline{y}cos(\phi)$. And to define the "area" of a set $S \subset \mathbb{R}^2$ we will consider $\iint_S dxdy$ iin order to assimilate the integral $\iint_S d\rho d\theta$ where both are invariant by rigid movements, which is essential for the demonstration of this result, where we will approach in three cases; the case where our curve C is a straight, a traverse and a regular flat curve any.

Keywords: Regular Flat Curve, Rigid Movement, measure.

[1]Matemática/IES do Paulo Vicente - Bolsista Agência de Fomento. e-mail: paulovicentt@gmail.com
[2]Curso/IES do Edinardo Oliveira - Orientador Agência de Fomente. e-mail: edinardoo@gmail.com.

1 Introdução

Dado uma curva C de comprimento l, gostaríamos de encontrar uma forma de associar o comprimento de nossa curva C com a medida de um conjunto de retas do plano. Sabemos que podemos calcular a área sobre uma curva apartir de pontos no plano. A ideia aqui é olhar sobre um conjunto de retas L que estão parametrizadas pelos parâmetros ρ e θ como "pontos" do plano a fim de conseguir associar uma medida a esse conjunto de retas, que mais a frente iremos definir. Com o conjunto de retas já definido irememos notar que a nossa medida do está associada ao número de intersessões (contadas com multiplicidade) que retas fazem com a nossa curva C.

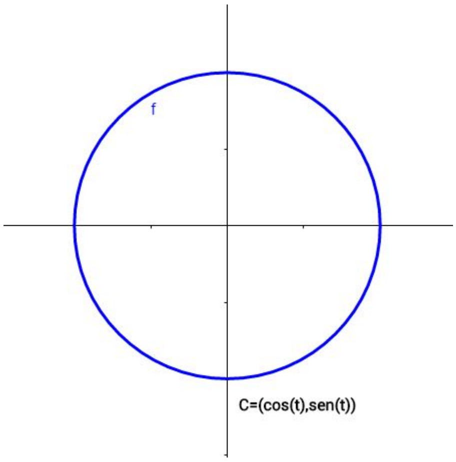
2 Objetivos

Neste trabalho pretendemos apresentar o resultado sobre a Fórmula de Cauchy-Crofton e algumas aplicações.

3 Preliminares

Para que iniciemos o assunto em questão, é imprescíndivel que conheçamos algumas definições a respeito da geometria diferencial que envolvem curvas. Todas as curvas aqui tratadas serão suaves.

Definição 1: *Uma curva plana é um conjunto C de pares ordenados (f(t), g(t)), em que f e g são funções contínuas em um intervalo I onde, $x = f(t)$ e $y = g(t)$, são as equações paramétricas de C, com parâmetro t.*



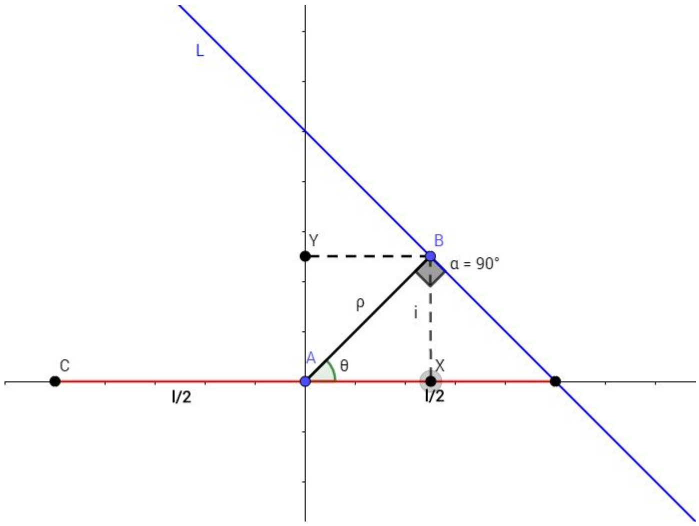
Definição 2: *Uma curva diferenciável parametrizada é uma aplicação diferenciável $\alpha : I \longrightarrow A \subseteq \mathbb{R}^3$ de um intervalo $I = (a, b)$ da reta real $\mathbb{R}$ em $A \subseteq \mathbb{R}^3$.*

Definição 3: *Diremos que uma curva C diferenciável parametrizada $\alpha(t) : I \longrightarrow A \subseteq \mathbb{R}^3$ é regular se $\alpha' \neq 0, \forall t \in I$.*

4 Teorema : Fórmula de Cauchy-Crofton.

Teorema 1: *Seja C uma curva plana regular de comprimento l. A medida do conjunto de retas (contadas com multiplicidade) que intersectam C é igual a 2l.*

Antes de apresentarmos uma demonstração com rigor matemático suficiente para este teorema, precisamos definir o que vem a ser uma medida razoável para nosso conjunto de retas do plano. Para iss, notemos que podemos escrever a equação de uma reta L por meio de parâmetros ρ e θ onde ρ é o segmento de reta que mede a distância ortogonal da reta L a origem e θ é a inclinação da reta que contém ρ com o eixo das abscissas,



note que

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \tag{1}$$

$$sen(\theta) = \frac{y}{\rho} \Leftrightarrow y = \rho sen(\theta) \Leftrightarrow y^2 = y\rho sen(\theta) \tag{2}$$

$$cos(\theta) = \frac{x}{\rho} \Leftrightarrow x = \rho sen(\theta) \Leftrightarrow x^2 = x\rho sen(\theta) \tag{3}$$

e de forma análoga substituindo (2) e (3) em (1) temos

$$x\rho cos(\theta) + y\rho sen(\theta) = \rho^2 \Leftrightarrow \rho(xcos(\theta) + ysen(\theta)) = \rho^2.$$

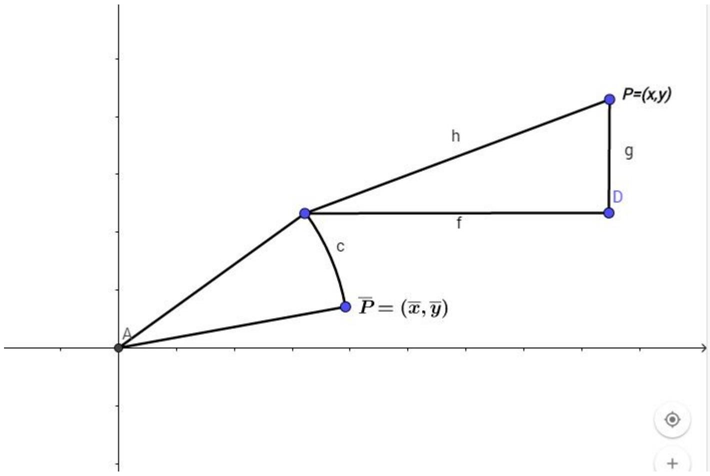
Com a reta L terá a sua equação dada por $xcos(\theta) + ysen(\theta) = \rho$. E, a partir daqui, vamos considerar o conjunto de todas as retas do plano dadas pelo conjunto

$$\Gamma = \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 | \rho \geqslant 0, \theta \in [0, 2\pi)\}.$$

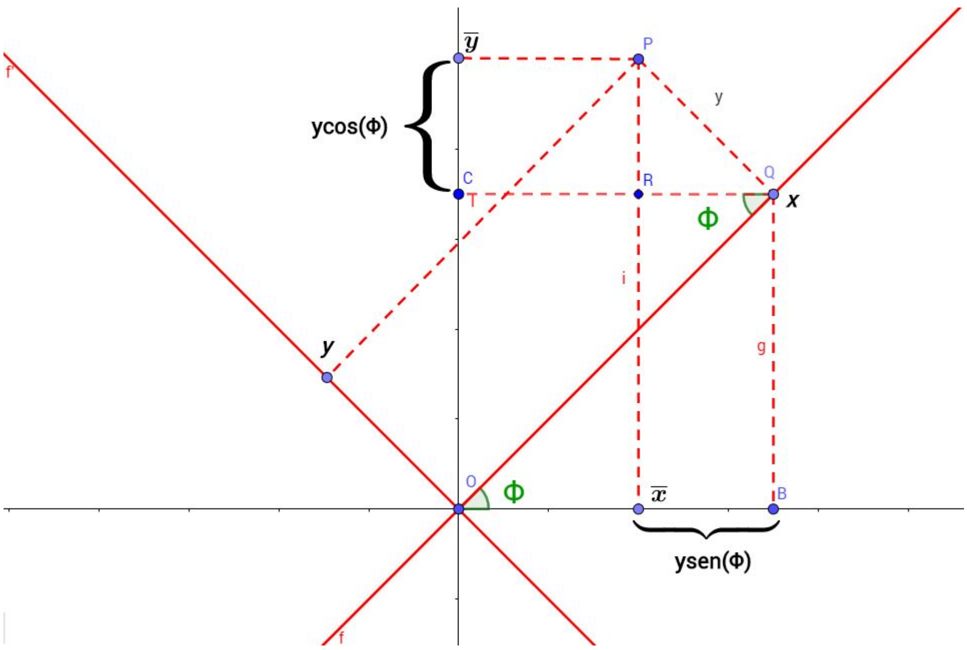
Iremos provar mais a frente que, a menos de uma escolha de unidades, existe uma única medida aceitável para este conjunto. Para que haja uma melhor compreensão iremos tratar tal medida em termos de "área" em $\mathbb{R}^2$. Iremos definir agora o que vem a ser um movimento rígido em $\mathbb{R}^2$.

Definição 4: *Um Movimento Rígido em* $\mathbb{R}^2$ *é uma aplicação* $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *dada por* $(\overline{x}, \overline{y}) \longrightarrow (x, y)$ *onde*

$$x = a + \overline{x}cos(\phi) - \overline{y}sen(\phi)$$
$$y = b + \overline{x}sen(\phi) + \overline{y}cos(\phi)$$



Ou seja, o movimento rígido em $\mathbb{R}^2$ nada mais é do que uma rotação e um translação. O movimento rígido em questão é obtido pela mudança de coordenadas por rotação de eixos .



Notemos que

$$\overline{PQ} = y \Rightarrow \overline{QR} = ysen(\phi)$$

e ainda

$$\overline{PR} = ycos(\phi)$$

Observe também que $\overline{OB} = xcos(\phi)$ e, $\overline{OC} = xsen(\phi)$ e, com isso, obtemos que

$$\overline{x} = xcos(\phi) - ysen(\phi)$$
$$\overline{y} = xsen(\phi) + ycos(\phi)$$

o, ainda,

$$x = \overline{x}cos(\phi) + \overline{y}sen(\phi)$$
$$y = \overline{y}cos(\phi) - \overline{x}sen(\phi).$$

Com iss, basta somarmos a e b nas respectivas coordenas apresentadas.

Para definir a área de um conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^2$ consideraremos a integral dupla a seguir

$$\iint_S dxdy.$$

Note que o elemento de área dxdy é invariante por movimentos rígidos, como vemos na proposição a seguir.

Proposição 1: *Seja f(x,y) uma função contínua em $\mathbb{R}^2$. Para um conjunto qualquer $S \subseteq \mathbb{R}^2$, defina a área A de S por*

$$A(S) = \iint_S f(x,y)dxdy$$

Suponha que A seja invariante por movimentos rígidos ; Isto é, se S é um conjunto qualquer e $\overline{S} = F^{-1}(S)$, onde F é o movimento rígido , temos

$$A(\overline{S}) = \iint_{\overline{S}} f(\overline{x},\overline{y})d\overline{x}d\overline{y} = \iint_S f(x,y)dxdy = A(S)$$

Então $f(x,y) = const.$

Demonstração: Recordemos, para a nossa demonstração, a fórmula de mudança de variáveis em integrais múltiplas

Seja

$$\begin{array}{rcl} F : \overline{S} \subseteq \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & S \subseteq \mathbb{R}^2 \\ (\overline{x},\overline{y}) & \longrightarrow & (x(\overline{x},\overline{y}), y(\overline{x},\overline{y})) \end{array}$$

e $f : S \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função integrável. Então*

$$\iint_S f(x,y)dxdy = \iint_{\overline{S}} f(F(\overline{x},\overline{y})) \left\| \frac{\partial(x,y)}{\partial(\overline{x},\overline{y})} \right\| d\overline{x}d\overline{y}.$$

Aplicando então, o teorema da madança de variável na nossa função f teremos que

$$\iint_S f(x,y)dxdy = \iint_{\overline{S}} f(\overline{x},\overline{y}) \left\| \frac{\partial(x,y)}{\partial(\overline{x},\overline{y})} \right\| d\overline{x}d\overline{y}. \tag{4}$$

Consideraremos $x = x(\overline{x},\overline{y})$ e $y = y(\overline{x},\overline{y})$ funções de derivadas parciais contínuas que definem uma mudança de variáveis $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\overline{S} = T^{-1}(S)$ onde T é o nosso movimento rígido já apresentado anteriormente.Então o Jacobiano de T é dada pela matriz

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\overline{x},\overline{y})} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix},$$

onde T é a transformção do movimento rígido já apresentado. Calculando o Jacobiano da transformação T temos

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\overline{x},\overline{y})} = \begin{vmatrix} cos(\phi) & -sen(\phi) \\ sen(\phi) & cos(\phi) \end{vmatrix} = 1$$

Com isso, a partir da equação (4) temos

$$\iint_S f(x(\overline{x},\overline{y}), y(\overline{x},\overline{y}))dxdy = \iint_{\overline{S}} f(\overline{x},\overline{y})d\overline{x}d\overline{y}.$$

Como S é um subconjunto arbitrário

$$f(x(\overline{x},\overline{y}), y(\overline{x},\overline{y})) = f(\overline{x},\overline{y})d\overline{x}$$

Pelo fato de F ser um movimento rígido e estar definido em todos os pares (x, y) e $(\overline{x},\overline{y})$ pertencentes ao plano $\mathbb{R}^2$,temos $F(x, y) = (\overline{x},\overline{y})$. Logo

$$f(x, y) = (f \circ F)(\overline{x},\overline{y}) = f(\overline{x},\overline{y})$$

e com isso $f(x, y) = const.$■

Com base no que foi demonstrado, temos que o Jacobiano de um movimento rígido em $\mathbb{R}^2$ é sempre igual a 1, e que sempre existirá um movimento rígido levando um par ordenado a outro.

Note que o movimento rígido apresentado induz uma tranformação sobre Γ aplicando a reta $xcos(\theta) + ysen(\theta) = \rho$ sobre a reta $\overline{x}cos(\theta - \phi) + ysen(\theta - \phi) = \rho - acos(\theta) - bsen(\theta)$. Isto indica que o movimento rígido em questão aplicado em Γ é

$$\overline{\rho} = \rho - acos(\theta) - bsen(\theta)$$

$$\overline{\theta} = \theta - \phi$$

Tal transformação também é transitiva sobre conjuntos de retas do plano. Com isso, definimos a medida de um conjunto $S \subseteq \Gamma$ como

$$\iint_S d\rho d\theta.$$

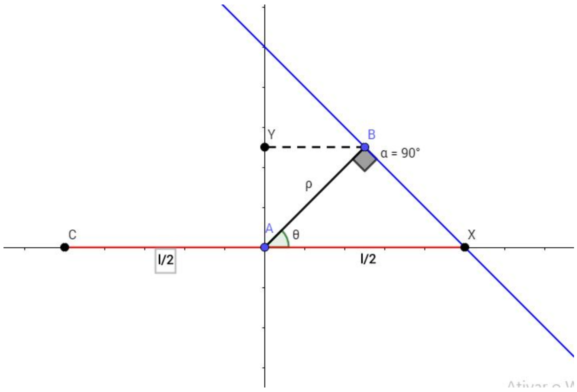
Fazendo uma demonstração semelhante a da *proposição 1*, conseguimos verificar que, a menos de um fator const., esta é a única medida em Γ que é invariannte por movimentos rígidos.

Demonstração do Teorema 1: Em primeiro lugar vamos supor que nossa curva C é um segmento de comprimento l. Vamos supor que nosso segmento está sobre o eixo Ox dividido em duas partes iguais, e caso não estivesse bastaria aplicar um movimento rígido para que ocorresse o desejado. Seja $n = n_{(\rho,\theta)}$ o número de pontos de interseção das retas de parâmentos $(\rho, \theta) \in \Gamma$, como C é um segmento , $n_{(\rho,\theta)} = 1, \forall \rho, \theta$. Portanto

$$\iint_\Gamma n_{(\rho,\theta)} d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \int_a^b d\rho d\theta$$

Os valores pelos quais a, b irão variar, serão determinados a seguir. Podemos verificar que se o limite inferior da integral é 0, ou seja $\rho = 0$, existe uma reta que corta C. Vejamos o limite superior.

Denotamos como $l_0 \sim (\rho_0, \theta_0)$ a reta que corta C cujo ρ é o maior possível, isto é $\rho' > \rho$ a implica que reta (ρ', θ_0) não toca C.



vemos que $\rho \perp L$.

Analisando o triângulo $\triangle ABX$ com hipotenusa de comprimento l/2 no lado positivo do eixo Ox, obtemos que $\rho = \dfrac{l}{2}cos(\theta)$. Como $\rho \geq 0$, então $\rho = \dfrac{l}{2}|cos(\theta)|$. Com isso, temos que

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{l}{2}|cos(\theta)|} d\rho d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{l}{2}|cos(\theta)|d\theta = \frac{l}{2}\left[\underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos(\theta)d\theta}_{2} - \underbrace{\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} cos(\theta)d\theta}_{-2}\right] = \frac{l}{2}\cdot 4 = 2l,$$

como era esperado. Faremos agora o caso em que nossa curva C é uma poligonal de m lados . Denotaremos S_i cada segmento de C, e l_i seus respectivos comprimentos. Ou seja,

$$l = \sum_{i=0}^{m} l_i$$

Neste caso, podemos calcular a "área" em cada segmento

$$\iint_{S_i}\sum_{i=0}^{m} n_{(\rho_i,\theta_i)}d\rho_i d\theta_i = \iint_{S_0} n_{(\rho_0,\theta_0)}d\rho_0 d\theta_0 + \iint_{S_1} n_{(\rho_1,\theta_1)}d\rho_1 d\theta_1 \cdots + \iint_{S_1} n_{(\rho_m,\theta_m)}d\rho_m d\theta_m$$

$$\iint_{S_i} n_{(\rho_i,\theta_i)}d\rho_i d\theta_i = \underbrace{\iint_{S_0} d\rho_0 d\theta_0}_{2l_0} + \underbrace{\iint_{S_1} d\rho_1 d\theta_1}_{2l_1} \cdots + \underbrace{\iint_{S_m} d\rho_m d\theta_m}_{2l_m}$$

$$\iint_{S_i} n_{(\rho_i,\theta_i)}d\rho_i d\theta_i = 2\sum_{i=0}^{m} l_i = 2l$$

Só nos resta agora demonstrar o caso em que C é uma C.P.R qualquer. Para isso analisemos o caso anterior. Se C é C.P.R. podemos aproximar o comprimeto desta curva por uma poligonal de segmentos S_i de comprimentos l_i, Então, por uma processo de limite temos que

$$l = \lim_{m\to\infty}\sum_{i=0}^{\infty} l_i$$

e também

$$\iint_{\Gamma} n_{(\rho,\theta)}d\rho d\theta = \lim_{m\to\infty}\sum_{i=0}^{m}\iint_{S_i} n_{(\rho_i,\theta_i)}d\rho_i d\theta_i$$

Daí

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{i=0}^{m}\iint_{S_i} n_{(\rho_i,\theta_i)}d\rho_i d\theta_i = \lim_{m\to\infty} 2\sum_{i=0}^{m} l_i = 2l$$

Isto é,

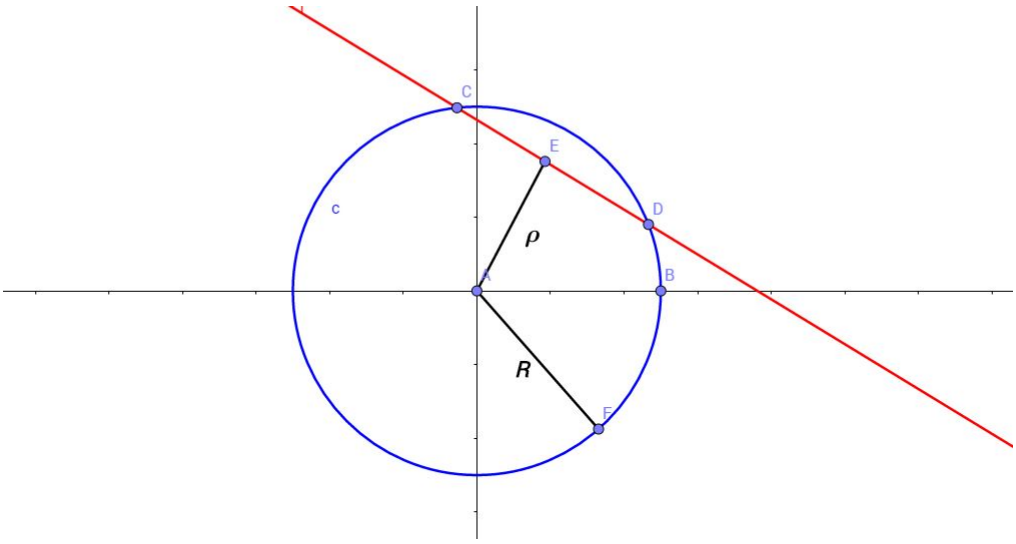
$$\iint_{\Gamma} n_{(\rho,\theta)} d\rho d\theta = 2l$$

para toda C.P.R. C.■

O resultado apresentado pode ser aplicado de diversas formas. Umas delas é usar para o cálculo de comprimentos de curvas ou seja

$$\iint_{\Gamma} n_{(\rho,\theta)} d\rho d\theta = 2l \Leftrightarrow \frac{1}{2}\iint_{\Gamma} n_{(\rho,\theta)} d\rho d\theta = l$$

façamos agora um exemplo simples para uma melhor compreensão, calculando o perímetro de um círculo



Note que,

$$\begin{aligned} n_{(\rho,\theta)} &= 0; \rho > 0 \\ n_{(\rho,\theta)} &= 2; \rho \leqslant R. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\iint_{\Gamma} n_{(\rho,\theta)} d\rho d\theta &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{R} 2 d\rho d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 2R d\theta \\ &= 2\pi R \end{aligned}$$

como era de se esperar.

A fórmula de Cauchy-Crofton se mostra extremamente eficiente para o cálculo de comprimento de curvas, e fornece ainda uma vantagem levando em consideração que não precisamos identificar ou ter conhecimento da função que caracteriza o traço curva.

5 REFERÊNCIAS

[1] Manfredo Perdigão do Carmo , "Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies". Coleção Textos Universitários. IMPA (RJ). 2005.

[2] Daniel García Cano., *GEOMETRÍA GLOBAL DE CURVAS PLANAS.* Universidade de Sevilla.

[3] Miles Calabresi . *What is. . . Crofton's Formula.* 18 Julho 2017.