A DESIGUALDADE ISOPERIMÉTRICA

Luiz Felipe de Pinho Sousa[1] *& Antonio Edinardo de Oliveira*[2]

Resumo

Dentre os teoremas pertinentes à Geometria Diferencial global, o Teorema da Desigualdade Isoperimétrica é considerado um dos mais antigos. Além disso, é indiscutível sua aplicabilidade em problemas de otimização de áreas. O teorema abordado procura encontrar dentre todas as curvas simples e fechadas de determinado comprimento l, qual delimita maior área. Ao longo do trabalho, foram apresentadas informações preliminares do assunto, seguidas de demonstração, de maneira que facilitasse o entendimento do leitor.

Palavras-chave : Desigualdade Isoperimétrica , Otimização , Área.

THE ISOPERIMETRIC INEQUALITY

Abstract

Among the theorems pertinent to Global Differential Geometry, the Isoperimetric Inequality Theorem is considered one of the oldest. In addition, its applicability to area optimization problems is indisputable. The theorem covered seeks to find among all the simple and closed curves of a given length l, which delimits a larger area. Throughout the work, preliminary information on the subject was presented, followed by a demonstration, in a way that facilitated the understanding of the reader.

Keywords: Isoperimetric Inequality, Optimization, Area.

[1]Matemática/URCA - Luiz Felipe de Pinho Sousa(PIBIC - URCA). e-mail: louiz1998@gmail.com
[2]Matemática/URCA - Antonio Edinardo de Oliveira. e-mail: edinardoo@gmail.com.

1 Introdução

O Teorema da Desigualdade Isoperimétrica é, provavelmente, um dos teoremas mais pretéritos da Geometria Diferencial global e está relacionado ao seguinte problema isoperimérico: Dentre todas as curvas simples fechadas no plano com um dado comprimento l, qual delas delimita a maior área?

A solução do teorema é conhecida desde a Grécia Antiga: um círculo, entretanto, a dificuldade em demonstrá-la fez com que sua prova rigorosa se estendesse até o ano de 1870. Nesse ano, K. Weierstrass constatou que questões semelhantes não possuíam solução e apresentou uma prova completa de que existia uma solução para o problema isoperimétrico. Todavia, a prova de Weierstrass mostrava-se um tanto complexa, uma vez que foi formulada para ser utilizada em outra teoria desenvolvida por ele, a qual possuía problemas de maximização (ou minimização) de algumas integrais, conhecida como Cálculo das Variações. Algum tempo depois, novas demonstrações foram formuládas.

Até hoje, a desigualdade isoperimétrica continua sendo objeto de estudo de muitos matemáticos em diversas áreas, como: geometria diferencial, geometria discreta e convexa, teoria de espaços de Banach, entre outras. Generalizações desse problema ainda estão sendo desenvolvidas, consistindo em considerá-lo em R^3, em R^n ou em variedades riemannianas.

Assim, o presente trabalho fundamenta-se no Teorema da Desigualdade Isoperimétrica e está dividido em duas partes principais. A primeira propõe apresentar resultados prévios, que serão norteadores para compreensão do item seguinte, a demonstração. A demonstração apresentada é devida ao matemático alemão Erhard Schmidt(1939).

2 Objetivos

Este trabalho tem como objetivo principal apresentar o Teorema da Desigualdade Isoperimétrica,abordando a demonstração pertencente a E. Schimidt, que é uma das mais famosas. Além disso, outra finalidade é facilitar o entendimento do leitor, através da exposição do teorema de forma simplificada.

3 Preliminares

Definição 1. Uma função diferenciável em um intervalo fechado $[a, b]$ é a restrição de uma função diferenciável definida em um intervalo aberto contendo $[a, b]$.

Definição 2. Uma curva parametrizada diferenciável $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ é dita *regular* se $\forall t \in I,\ \alpha'(t) \neq 0$.

Definição 3. Uma curva plana fechada é uma curva parametrizada regular $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ tal que α e todas as suas derivadas coincidam em a e b, ou seja:

$$\alpha(a) = \alpha(b),\ \alpha'(a) = \alpha'(b),\ \alpha''(a) = \alpha''(b),\ \alpha'''(a) = \alpha'''(b)\ldots$$

Definição 4. Uma curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ é dita simples se não possui auto interseções; isto é: se $t_1, t_2 \in I, t_1 \neq t_2$, então, $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$.

Definição 5. Dada uma curva regular $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ e dado $t_0 \in I$, a aplicação $\alpha(t) = \int_{t_0}^{t} |\alpha'(t)|dt$ é denominada função comprimento de arco da curva α a partir de t_0. Esta função é diferenciável, pois α é uma curva regular.

Definição 6. Uma curva regular $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ é dita parametrizada pelo comprimento de arco, se para cada $t_0, t_1 \in I, t_0 \leq t_1$ o comprimento do arco da curva α de t_0 a t_1 é igual a $t_1 - t_0$. Isto é:

$$\int_{t_0}^{t} |\alpha'(t)|dt = t_0 - t_1$$

Em geral, consideramos curvas $\alpha : [0, l] \to \mathbb{R}^2$ parametrizadas pelo comprimento de arco s; logo, l é o comprimento da curva α.

Proposição 1. Uma curva regular $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ está parametrizada pelo comprimento do arco se, e somente se, $\forall t \in I, |\alpha'(t)| = 1$.

Demonstração. Suponha que α esteja parametrizada pelo comprimento de arco e $t_0 \in I$. Considere a função $s : I \to \mathbb{R}$ que para cada $t \in I$ associa $s(t) = \int_{t_0}^{t} |\alpha'(t)|dt$. Se $t_0 \leq t$, então, por hipótese,$\int_{t}^{t_0} |\alpha'(t)|dt = t_0 - t$; se $t \leq t_0$, então $-s(t) = \int_{t}^{t_0} |\alpha'(t)|dt = t_0 - t$. Portanto, para todo $t \in I, s(t) = t - t_0$, donde $s'(t) = 1$. Como $s'(t) = |\alpha'(t)|$, concluímos que $|\alpha'(t)| = 1$ $\forall t \in I$. A recíproca é imediata.

■

Observação 1. Admitiremos que uma curva simples fechada C no plano delimita uma região limitada deste plano que é chamada interior de C. Esta afirmação é válida por se tratar de uma curva no plano. Já no espaço, a afirmação deixa de ser válida. Basta tomarmos como exemplo, C sendo um meridiano em um toro, claramente, C não delimita um região no toro.

Observação 2. Sempre que fizermos referência a área delimitada por uma curva simples e fechada C, estaremos nos referindo à área do interior de C. Vamos também supor que o parâmetro de uma curva simples fechada pode ser escolhido de forma que ao percorrermos a curva no sentido crescente do parâmetro, o interior da curva fica à nossa esquerda. Diz - se que a curva tem orientação positiva.

Lema 1. Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ uma curva simples e fechada, positivamente orientada e definida por $\alpha(t) = (x(t), y(t))$. Então:

$$A = -\int_{a}^{b} y(t)x(t)dt = \int_{a}^{b} x(t)y'(t)dt = \frac{1}{2}\int_{a}^{b} (x(t)y'(t) - y(t)x'(t))dt \tag{1}$$

Demonstração. Para a demonstração, considere dois casos, um simples e um geral.

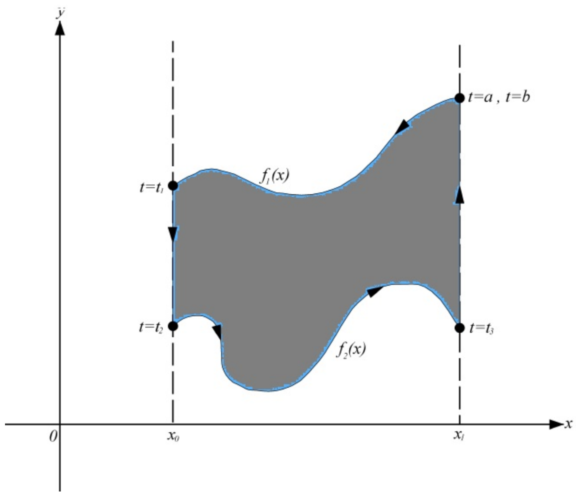
Caso 1.(Simples) A curva é formada por dois segmentos de reta paralelos ao eixo O_y e pelos gráficos das funções $y = f_1(x)$ e $y = f_2(x),\ x \in [x_0, x_1],\ f_1 > f_2$.

Para demonstrar (1) devemos mostrar as igualdades:

(i) $-\int_{a}^{b} y(t)x'(t)dt = \int_{a}^{b} x(t)y'(t)dt$

(ii) $A = -\int_{a}^{b} y(t)x'(t)dt$

(iii) $A = \dfrac{1}{2}\int_{a}^{b}(x(t)y'(t) - y(t)x'(t))dt$



Omitiremos o parâmetro t por comodidade.

(i) Derivando o produto xy vem

$$(xy)' = x'y + xy' \Rightarrow xy' = (xy)' - x'y$$

integrando em ambos os membros no intervalo [a,b],

$$\begin{aligned}\int_a^b xy'dt &= \int_a^b (xy)'dt - \int_a^b x'ydt\\ &= x(b)y(b) - x(a)y(a) - \int_a^b x'ydt\\ &= -\int_a^b x'ydt\end{aligned}$$

(ii) Veja pela figura que

$$A = \int_{x_0}^{x_1} f_1(x)dx - \int_{x_0}^{x_1} f_2(x)dx$$

A curva é positivamente orientada, utilizando a notação da figura, vamos mostrar que:

$$A = \int_a^{t_1} yx'dt - \int_{t_1}^{t_2} yx'dt - \int_{t_2}^{t_3} yx'dt - \int_{t_3}^{b} yx'dt$$

Chamando as integrais de (I), (II), (III), (IV). Parametrizando (I) temos, $\alpha(t) = (t, f_1(t)), t \in [x_0, x_1]$, logo, $x(t) = t \Rightarrow x'(t) = 1$. Isto implica que

$$-\int_a^{t_1} y(t)x'(t)dt = \int_{t_1}^{a} y(t)x'(t)dt = \int_{x_0}^{x_1} f_1(x)dx$$

Parametrizando (II) temos,

$$\alpha(t) = (x_0, t) \Rightarrow \alpha'(t) = (0,1) \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} t.0dt = 0$$

Parametrizando (III) temos, $\alpha(t) = (t, f_2(t)), t \in [x_0, x_1]$, logo, $x(t) = t \Rightarrow x'(t) = 1$

$$\Rightarrow -\int_{t_2}^{t_3} y(t)x'(t)dt = -\int_{x_0}^{x_1} f_2(x)dx$$

Parametrizando (IV) temos,

$$\alpha(t) = (x_1, t) \Rightarrow \alpha'(t) = (0, 1) \Rightarrow -\int_{t_3}^{b} y(t)x'(t)dt = -\int_{t_3}^{b} t.0dt = 0$$

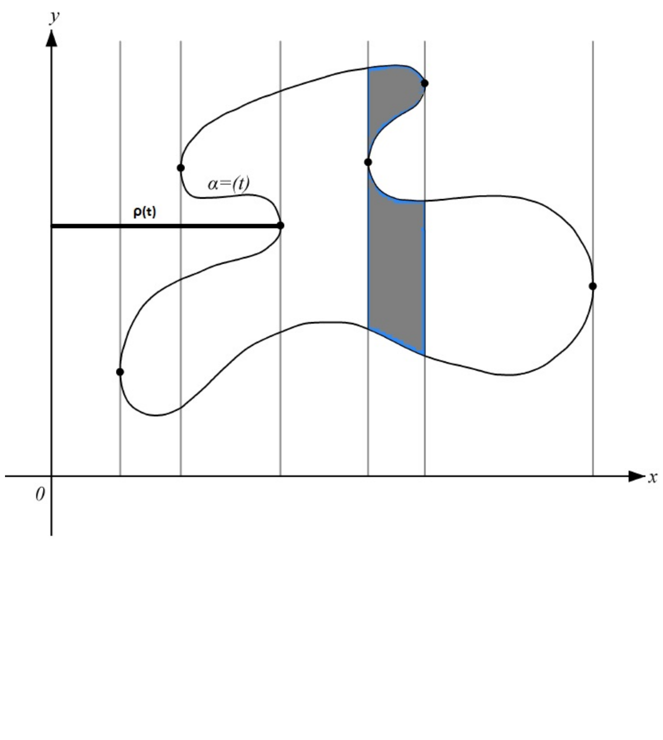
com isso mostramos que:

$$A = \int_{x_0}^{x_1} f_1(x)dx - \int_{x_0}^{x_1} f_2(x)dx = -\int_{a}^{b} y(t)x'(t)dt$$

(iii) Das igualdades (i) e (ii),$A = -\int_a^b y(t)x'(t)dt \ e \ A = \int_a^b x(t)y'(t)dt$. Somando as equações teremos,

$$2A = \int_a^b x(t)y'(t)dt - \int_a^b y(t)x'(t)dt$$
$$\Rightarrow A = \frac{1}{2}\int_a^b x(t)y'(t)dt - \int_a^b y(t)x'(t)dt$$

Caso 2.(Geral) Para obtermos uma prova para o caso geral, precisaríamos mostrar que é possível dividir a região limitada pela curva em um número finito de regiões do tipo da última figura. E isso é evidentemente possível se existe uma reta E no plano tal que a distância $\rho(t)$ de $\alpha(t)$ a esta reta é uma função com um número finito de pontos críticos, pois se todos os seus pontos fossem críticos, essa distância $\rho(t)$ sería constante, fazendo com que $\alpha(t)$ fosse uma reta paralela a y, consequentemente sendo uma curva não fechada.



■

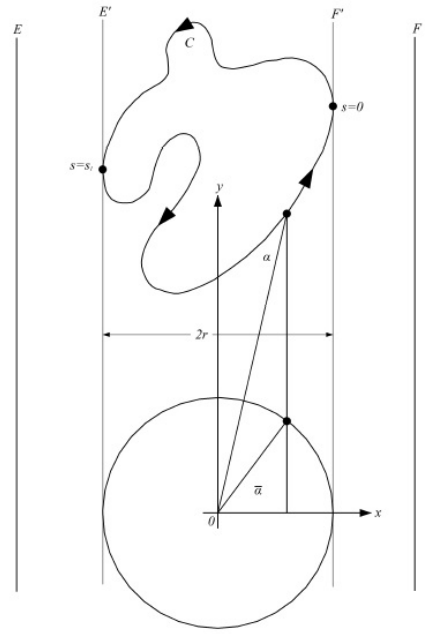
4 O teorema da desiguadade isoperimétrica

Teorema (Desigualdade isoperimétrica) 1. *Seja C uma curva plana simples e fechada com comprimento de arco l, e seja A a área de uma região limitada por C, então*

$$l^2 - 4\pi A \geqslant 0 \tag{2}$$

e verifica-se a igualdade se, e somente se, C é um círculo.

Demonstração. Sejam E e F duas retas paralelas que não intersectam a curva fechada C, e considere o movimento destas retas até que elas toquem C pela primeira vez. Obtemos assim duas reta paralelas E' e F', tangentes à curva C, de forma que C está totalmente contida na faixa limitada por E' e F'. Considere agora um círculo S^1 que será tangente à E' e F' e não intersecta C. Seja O o centro de S^1 e introduza o sistema de coordenadas cartesianas com a origem em O, e o eixo O_x perpendicular à E' e F'.



Parametrize C pelo comprimento de arco, $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, de modo que C tenha orientação positiva e os pontos de tangência com E' e F' sejam, respectivamente, $S = 0$ *e* $S = S_1$. Podemos supor que a equação de S^1 é

$$\overline{\alpha}(s) = (\overline{x}(s), \overline{y}(s)) = (x(s), \overline{y}(s)),\ s \in [0, l]$$

Utilizando a equação do lema apresentado anteriormente e denotando por $\overline{A}$ a área da região limitada por S^1, temos

$$A = \int_0^l xy'ds,\ \overline{A} = \pi r^2 = -\int_0^l \overline{y}x'ds$$

onde 2r é a distância entre L e L'. Omitiremos o parâmetro s por comodidade. Assim,

$$\begin{aligned} A+\pi r^2 &= \int_0^l xy'ds - \int_0^l \overline{y}x'ds \\ &= \int_0^l (xy' - \overline{y}x')ds = \int_0^l \langle (x',y'),(-\overline{y},x)\rangle ds \\ &\leq \int_0^l |(x',y')||(-\overline{y},x)|ds \quad (*) \\ &= \int_0^l |\alpha'||\overline{\alpha}|ds = \int_0^l rds = rl. \\ &\therefore \ A+\pi r^2 \leq rl \end{aligned}$$

onde obtemos $(*)$ pela desigualdade de Cauchy Schwarz. A igualdade em $(*)$ é verificada se, e somente se, α' é multiplo de $\overline{\alpha}$.

$$\alpha' = \frac{1}{r}(-\overline{y},x)$$

Em particular teremos $y' = \dfrac{x}{r}$.

Sabendo que a média aritmética de dois números positivos é maior ou igual a sua média geométrica.

$$\begin{aligned} \sqrt{2}\sqrt{\pi r^2} \quad &\leq \quad \frac{A+\pi r^2}{2} \quad \leq \quad \frac{1}{2}rl \\ \Rightarrow A\pi r^2 \quad &\leq \quad \frac{(A+\pi r^2)^2}{4} \quad \leq \quad \frac{1}{4}r^2l^2 \\ \Rightarrow 4A\pi r^2 \quad &\leq \quad (A+\pi r^2)^2 \quad \leq \quad 4r^2l^2 \qquad (**) \\ \therefore \ 4A\pi r^2 &\leq r^2l^2 \Rightarrow 4A\pi \leq l^2 \Rightarrow l^2 - 4A\pi \geq 0 \end{aligned}$$

Precisamos agora, mostrar que vale a igualdade quando C é um círculo. Suponha que vale a igualdade em (2), ou seja,

$$l^2 - 4A\pi = 0 \Rightarrow l^2 = 4A\pi. \ \textit{Substituindo em } (**),$$

$$4A\pi r^2 \leq (A+\pi r^2)^2 \leq 4A\pi r^2 \ \therefore \ (A+\pi r^2)^2 = 4A\pi r^2$$

$$\Rightarrow A^2 + 2A\pi r^2 + (\pi r^2)^2 = 4a\pi r^2$$

$$\Rightarrow A^2 - 2A\pi r^2 + (\pi r^2)^2 = 0$$

$$\Rightarrow (A-\pi r^2)^2 = 0 \quad \Rightarrow A - \pi r^2 = 0 \quad \Rightarrow A = \pi r^2$$

Além disso, como estamos supondo que $l^2 = 4\pi A$

$$\Rightarrow \ 4A\pi r^2 \leq (A+\pi r^2)^2 \leq r^2l^2 = 4A\pi r^2$$

$$\Rightarrow (A+\pi r^2)^2 = r^2l^2$$

$$\Rightarrow A + \pi r^2 = rl$$

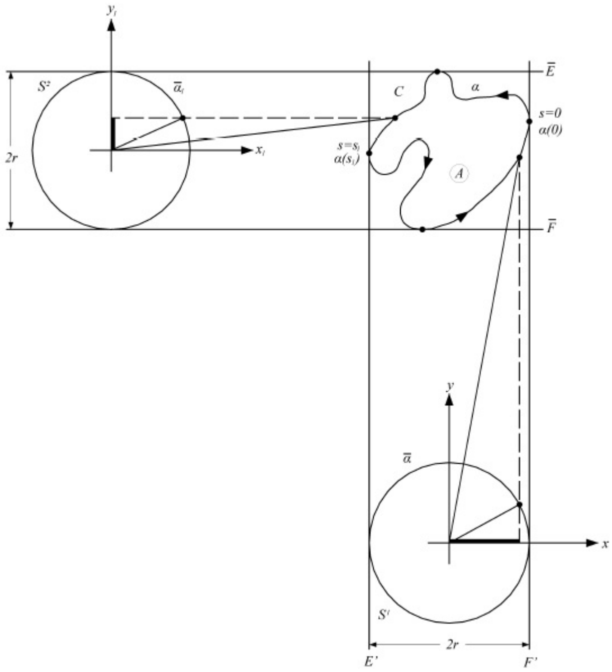
Como $A = \pi r^2$,

$$2\pi r^2 = rl \quad \Rightarrow \ r = \frac{l}{2\pi}$$

.

Obs. Ou seja, r não depende da direção das retas E' e F' e, portanto podemos repetir toda a demonstração a partir da figura para retas paralelas em qualquer direção.

Então, sejam $\overline{E}$ e $\overline{F}$ retas paralelas, tangentes a C, ambas perpendiculares a E e F, de modo que C está contida na faixa horizontal limitada por elas. Como acabamos de observar a distância entre as duas retas é 2r.



Como no caso anterior, considere um círculo S^2 tangente as retas $\overline{E}$ e $\overline{F}$ de modo que não intersecte C. Sejam (a, b) as coordenadas do centro desse círculo no sistema de coordenadas xy.

Com origem nesse ponto(a, b), considere um novo sistema de coordenadas x_1y_1 com eixo x_1 paralelo as retas $\overline{E}$ e $\overline{F}$. Como este sistema de coordenadas x_1y_1 pode ser obtido do sistema de coordenadas xy por uma translação pelo vetor (a, b), podemos considerar a seguinte parametrização, $\alpha_1 = (x_1(s), y_1(s)), s \in [0, l]$, pelo comprimento de arco da curva C, no sistema de coordenadas x_1y_1;

$$\begin{cases} x_1(s) &= x(s) - a \\ y_1(s) &= y(s) - b \end{cases}$$

Quando derivamos a primeira das expressões obtemos,

$$x_1{}' = x'.$$

Analisando a figura anterior, vimos que no sistema de coordenadas x_1y_1 o novo círculo tem parametrização da forma

$$\overline{\alpha_1} = (\overline{x_1}, y_1), \ \ s \in [0, l]$$

Sendo que, agora, a segunda coordenada, $y_1(s)$ das parametrizações de C e a de S^2 são iguais no sistema de coordenadas x_1y_1.

A partir de agora iremos repetir os argumentos ultilizados para as curvas C em S^1 agora para as curvas C em S^2, de parametrização $\alpha_1(s) = (x_1(s), y_1(s))$ e $\overline{\alpha_1}(s) = (\overline{x_1}(s), y_1(s)$ no sistema de coordenadas x_1y_1.

Vamos calcular as áreas, A e πr^2 limitadas por C e S^2 do seguinte modo:

$$A = -\int_0^l y_1 x_1' ds \;\; e \;\; \pi r^2 = \int_0^l \overline{x_1} y_1' ds$$

Somando as expressões:

$$\begin{aligned} A + \pi r^2 = \int_0^l (\overline{x_1} y_1' - y_1 x_1') ds &= \int_0^l \langle (x_1', y_1'), (-y_1, \overline{x_1}) \rangle ds \\ &\leq \int_0^l |\alpha_1'| |\overline{\alpha_1}| ds = rl. \end{aligned}$$

Como já mostramos que $A + \pi r^2 = rl$, podemos concluir que a desigualdade acima será fato uma igualdade.E podemos afirmar que os vetores α_1' e $(-y_1, \overline{x_1})$ apontam para a mesma direção, já que a igualdade foi obtida pela desigualdade de Cauchy Schwarz.

$$\Rightarrow \alpha_1' = \frac{(-y_1, \overline{x_1})}{|(-y_1, \overline{x_1})|} \;\; \therefore \;\; \alpha_1' = \frac{1}{r}(-y_1, \overline{x_1})$$

$$\Rightarrow \;\; x_1' = -\frac{1}{r} y_1$$

Assim,

$$\begin{aligned} x^2 + (y-b)^2 &= x^2 + {y_1}^2 \\ &= (ry')^2 + (-rx_1')^2 \\ &= r^2(y')^2 + r^2(x_1')^2 \\ &= r^2[(y')^2 + (x')^2] \\ &= r^2|\alpha'|^2 \;\; = \;\; r^2 \end{aligned}$$

$$\therefore \;\; x^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

Portanto, ao supormos a igualdade em (2), fica provado que a curva C, $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, é um círculo centrado em $(0, b)$ e raio r, no nosso sistema de coordenadas xy.

■

5 REFERÊNCIAS

[1] CARMO, Manfredo Perdigão do. "Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies". Coleção Textos Universitários. SBM (RJ). 2005.

[2] KLASER, Patrícia Kruse; TELICHEVESKY, Miriam. *O problema isoperimétrico*. 2016.

[3] PEREIRA, Ariana Patrici Santos Quintão.*A Desigualdade Isoperimétrica e uma aplicação.* Monografia de especialização - UFMG, Belo Horizonte, 2012.