VII SEMANA UNIVERSITÁRIA DA URCA – XXV Semana
de Iniciação Científica da URCA
e VIII Semana de Extensão da URCA
12 a 16 de dezembro de 2022
Tema: "DIVULGAÇÃO CIENTÍFICA, INDEPENDÊNCIA E SOBERANIA NACIONAL"
ISSN 1983-8174

Aureliana Belém Tavares[1]; **José Tiago Nogueira Cruz** [2]

Projeção Estereográfica e Algumas Propriedades Envolvendo Paralelos e Meridianos

Resumo: A projeção estereográfica de uma esfera de raio $\frac{n}{2}$, $n > 0$, centro $(0,0,\frac{n}{2})$ e equação dada por $x^2+y^2+\left(z-\frac{n}{2}\right)^2=\left(\frac{n}{2}\right)^2$, projeta a esfera no plano tangente $\{z=0\}$ que denotaremos por $\mathbb{R}^2\times\{0\}$. Mais precisamente, a projeção estereográfica é a uma aplicação que transforma pontos de uma esfera em pontos do plano tangente $\mathbb{R}^2\times\{0\}$ através de retas que passam pelo ponto norte $N=(0,0,n)$ e qualquer outro ponto $P\neq N$ da esfera. Esse processo nos fornece a aplicação $\pi_N : S^2_{n/2}((0,0,n/2))-\{N\}\to\mathbb{R}^2\times\{0\}$ definida por $\pi_N(x,y,z)=\left[\frac{n}{n-z}\right]\cdot(x,y,0)$. Os meridianos e paralelos são, respectivamente, grandes círculos que passam pelos polos (norte e sul) e círculo paralelo ao plano $\mathbb{R}^2\times\{0\}$ (denotados por $\mathscr{M}$ e $\mathscr{P}$) e reservam propriedades interessantes quando projetadas pela projeção estereográficas. Uma delas são: transformam os meridianos em retas que passam pela origem e transformam os paralelos em círculos que passam pela origem. E mais, ângulos entre dois meridianos são preservados e meridianos e paralelos (bem como suas projeções) se intersectarem ortogonalmente.

Palavras-chave: Projeção estereográfica. Paralelos. Meridianos. Área. Comprimento de Arco.

1 Introdução

A projeção estereográfica reserva diversas propriedades interessantes. Uma dela é a propriedade conforme, ou seja, as medidas de ângulos são preservadas.

Neste trabalho, iremos descrever a expressão geral de uma projeção estereográfica tomando como base uma esfera do tipo

$$x^2+y^2+\left(z-\frac{n}{2}\right)^2=\left(\frac{n}{2}\right)^2.$$

Em seguida vamos mostrar propriedades básicas dessa aplicação. Por exemplo, vamos projetar meridianos e paralelos, como também iremos mostrar que suas projeções se intersectam ortogonalmente.

2 Objetivos

O presente trabalho tem como objetivo investigar o comportamento da projeção de paralelos e de meridianos.

[1]Licenciatura em Matemática/URCA-PIBIC/URCA.E-mail: aureliana.belem@gmail.com
[2]DEMPA/URCA.E-mail: tiago.cruz@urca.br.com

3 Metodologia

Dados $p = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$ e $r \in \mathbb{R}$, a esfera bidimensional, com centro em p e raio r, será denotada por

$$S_p^2(r) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - p_1)^2 + (y - p_2)^2 + (z - p_3)^2 = r^2\right\}.$$

A esfera $S^2 := S^2_{(0,0,n/2)}(n/2)$ retirando o ponto $\{N\}$, onde N é polo norte, será identificada com plano $\prod_{xy} = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ pela aplicação

$$\begin{array}{rccc} \pi_N: & S^2_{(0,0,n/2)}(n/2) - \{N\} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \times \{0\} \\ & p = (x, y, z) & \longmapsto & q \end{array}$$

chamada de projeção estereográfica que a cada ponto p em seu domínio, associa $q \in \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ da seguinte maneira: considere a interseção da reta $N + t(p - N)$ com o plano $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$. Dessa maneira, existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $q := N + t_0(p - N) \in \prod_{xy}$.

A saber, o valor de t_0 é $\frac{n}{n-z}$. Portanto,

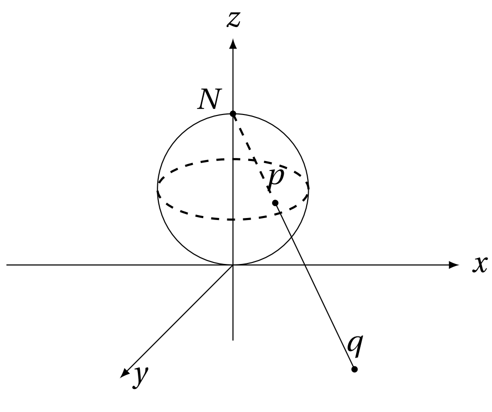
$$q = \left(\frac{nx}{n-z}, \frac{ny}{n-z}, 0\right).$$

A expressão analítica da aplicação π_N é

$$\pi_N(x, y, z) = \frac{n}{n-z}\left(x, y, 0\right).$$

A expressão de sua inversa é

$$\pi_N^{-1}\left(x, y, 0\right) = \left(\frac{n^2}{x^2 + y^2 + n^2} \cdot x, \frac{n^2}{x^2 + y^2 + n^2} \cdot y, -\frac{n^2}{x^2 + y^2 + n^2} \cdot n + n\right).$$



3.1 PROJEÇÃO DE PARALELOS

Os paralelos da esfera S^2 corresponde as circunferências formada pela interseção do plano

$$\pi_h : z = h \qquad 0 < h < n,$$

com a própria esfera S^2, o qual denotaremos por $\mathscr{P}_h$. Por definição, quaisquer dois pontos $p = (x, y, h), \tilde{p} = (\tilde{x}, \tilde{y}, h) \in \mathscr{P}_h$ satisfazem a igualdade

$$x^2 + y^2 = \left(\tfrac{n}{2}\right)^2 - \left(h - \tfrac{n}{2}\right)^2 = \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2.$$

Analisaremos o que acontece com a imagem do conjunto $\mathscr{P}_h$ via π_N. Mais precisamente, vamos mostrar que

$$\pi_N(\mathscr{P}_h) = S^1_{(0,0,0)}(r)$$

onde $r = \dfrac{n}{n-h}\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 - \left(h - \frac{n}{2}\right)^2}$.

Dados os pontos $p = (x, y, h), \tilde{p} = (\tilde{x}, \tilde{y}, h) \in \mathscr{P}_h$, note que

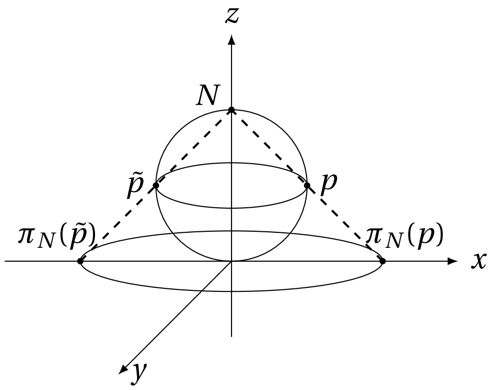
$$\begin{aligned} d\left(\pi_N(S), \pi_N(p)\right) &= d(S, \pi_N(p)) \\ &= \frac{n}{n-h}\sqrt{x^2 + y^2} \\ &= \frac{n}{n-h}\sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2} \\ &= d(S, \pi_N(p)) \\ &= d(\pi_N(S), \pi_N\left(\tilde{p}\right)) \end{aligned}$$

Como

$$d(\pi_N(S), \pi_N\left(p\right)) = d(\pi_N(S), \pi_N\left(\tilde{p}\right)),$$

segue que $\pi_N(\mathscr{P}_h)$ é um círculo contido no plano $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ com centro $(0, 0, 0)$ e raio

$$|\pi_N(p)| = \frac{n}{n-h}\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 - \left(h - \frac{n}{2}\right)^2}.$$



3.2 PROJEÇÃO DO MERIDIANO

Os meridianos são obtidos fazendo a interseção do plano

$$\pi_\alpha : y = \alpha x \qquad \alpha \in \mathbb{R},$$

com $S^2 - \{N\}$. Vamos denotar essa interseção por $\mathscr{M}_\alpha$. Note que $\mathscr{M}_\alpha \cap \mathscr{P}_h$ é um conjunto formado por apenas dois pontos.

Dado $p = (x, y, z) \in \mathscr{M}_\alpha$, por definição, $y = \alpha x$ e

$$\pi_N(p) = \frac{nx}{n-z}(1, \alpha, 0).$$

uma vez que α é fixado, o terno $v_\alpha := (1, \alpha, 0)$ é o vetor diretor de uma reta que passa pela origem de $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$.

Portanto,

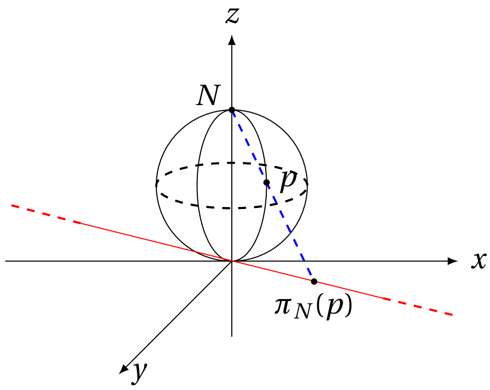
$$\pi_N(\mathscr{M}_\alpha) = [(1, \alpha, 0)].$$

Em S^2 podemos definir a seguinte relação: $p_1 \sim_\alpha p_2 \Leftrightarrow p_1, p_2 \in \mathscr{M}_\alpha$.

A relação $\sim_\alpha$ é de equivalência, pois satisfaz claramente as propriedades:

1. Transitividade:se $p_1 \sim_\alpha p_2$ e $p_2 \sim_\alpha p_3$, então $p_1 \sim_\alpha p_3$ para todo $p_1, p_2, p_3 \in S^2$.
2. Reflexividade: se $p_1 \sim_\alpha p_2$, então $p_2 \sim_\alpha p_1$ para todo $p_1, p_2 \in S^2$.
3. Simetria: Sempre temos $p \sim_\alpha p$ para todo $p \in S^2$.

O espaço $\pi_N(S^2/_{\sim_\alpha})$ é chamado de linha projetiva e denotada por RP^1.



3.3 ÂNGULOS ENTRE MERIDIANOS E PARALELOS

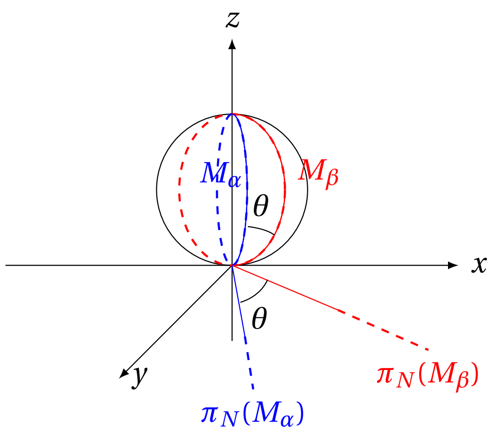
Dados dois meridianos $\mathcal{M}_\alpha, \mathcal{M}_\beta$ de $S^2 - \{N\}$, não é difícil ver que $\mathcal{M}_\alpha \cap \mathcal{M}_\beta = \{(0,0,0)\}$. O ângulo formado pelas projeções de $\mathcal{M}_\alpha$ e $\mathcal{M}_\beta$ é

$$\begin{aligned}\sphericalangle(\pi_N(\mathcal{M}_\alpha), \pi_N(\mathcal{M}_\beta)) &= \arccos \frac{\langle (1,\alpha,0);(1,\beta,0)\rangle}{\|(1,\alpha,0)\|\|(1,\beta,0)\|} \\ &= \arccos \frac{\langle v_\alpha; v_\beta\rangle}{\|v_\alpha\|\|v_\beta\|}\end{aligned}$$

Note que

$$\sphericalangle(\mathcal{M}_\alpha, \mathcal{M}_\beta) = \sphericalangle(\pi_N(\mathcal{M}_\alpha), \pi_N(\mathcal{M}_\beta)).$$

De fato, basta lembrar que o ângulo entre curvas é determinado calculando os ângulo entre os vetores tangente de sua interseção.Como os vetores $(1,\alpha,0)$ e $(1,\beta,0)$ são, respectivamente, os vetores tangentes dos meridianos $\mathcal{M}_\alpha$ e $\mathcal{M}_\beta$, segue o desejado.



Pelo que foi discutido logo acima, observe que a soma dos ângulos interno de um triângulo na esfera formado por um paralelo e meridiano é maior que $180°$. Para ver isso, basta considerar qualquer triângulo formado pelos meridianos $\mathscr{M}_\alpha$, $\mathscr{M}_\beta$ e o paralelo $\mathscr{P}_h$. Como

$$\sphericalangle(\mathscr{M}_\alpha, \mathscr{P}_h) = \sphericalangle(\mathscr{M}_\beta, \mathscr{P}_h) = \frac{\pi}{2}.$$

segue que

$$\triangle \mathscr{M}_\alpha \mathscr{M}_\beta \mathscr{P}_h = 2 \cdot \sphericalangle(\mathscr{M}_\alpha, \mathscr{P}_h) + \sphericalangle(\mathscr{M}_\alpha, \mathscr{M}_\beta) = \pi + (\mathscr{M}_\alpha, \mathscr{M}_\beta) > 0.$$

4 Resultados

Com base na proposta desse artigo, que é expor algumas relações entre entes geométricos presente na esfera de raio qualquer com as suas imagens, verificamos que os paralelos são transformados em círculos, os meridianos são transformados em retas e os ângulos entre meridianos são invariantes pelas projeções.

5 Conclusão

A Projeções Estereográfica é uma representação bidimensionais da esfera. Essa projeção possuem determinadas características e apresentam deformações. Mais precisamente, os paralelos (semicírculo paralelo ao plano Π_{xy}) e os meridianos (grandes círculos que passam pelos polos), são ortogonais entre si e são transformados pela projeção estereográfica em linhas retas e círculos, respectivamente.

6 Agradecimentos

Agradeço a Funcap pelo apoio financeiro.

Referências

[1] ÁVILA, Geraldo. Variáveis Complexas e Aplicações. 3a ed. Rio de Janeiro, LTC, 2008.

[2] DO CARMO, Manfredo Perdigão. Geometria diferencial de curvas e superfícies. Sociedade Brasileira de Matemática, 2010.

[3] GUIDORIZZI, Hamilton L. Um Curso de Cálculo, vol. 1, 2, 3 e 4. LTC Editora, Rio de Janeiro, 2001.