The Moon in a Puddle: Um Teorema Local-Global em Geometria Diferencial

Jucy Saraiva Sindeaux[1] *e Flávio França Cruz*[2]

Resumo

Neste trabalho, apresentamos o Teorema *The Moon in a Puddle*. Este teorema é um exemplo de resultado que possui apenas hipóteses locais mas cuja tese tem caráter global. Precisamente, o Teorema afirma que se uma curva simples e fechada possuir curvatura limitada por 1 então a região delimitada pela curva possui um círculo de raio 1. Para a realização da demonstração deste Teorema, utilizamos o lema que fala que seja gamma um loop plano, regular, suave e simples, então existe um ponto de gamma (diferente da base), onde seu círculo osculador sigma suporta gamma por dentro. E, por fim, conseguimos uma aplicação que mostra que qualquer curva plana suave simples e fechada é suportada por seu círculo osculador em quatro pontos distintos; dois por dentro e dois por fora.

Palavras-chave : Teoremas tipo Local-Global, Teorema The Moon in a Puddle Theorem, Curvas fechadas

The Moon in a Puddle: A Local-Global Theorem in Differential Geometry

Abstract

In this work, we present the Theorem *The Moon in a Puddle*. This theorem is an example of a result that has only local hypotheses but whose thesis has a global character. Precisely, it states that a if a simple closed curve has curvature bounded by 1 then the region bounded by the curve has a circle of radius 1. To carry out the proof of this Theorem, we use the lemma that says that be gamma is a simple smooth regular plane loop then at one point of gamma (distinct from its base), its osculating circle supports from inside. And, finally, we

[1]Licenciatura em Matemática/URCA-PIBIC/CNPq. e-mail: jucysaraiva20@gmail.com

[2]Universidade Regional do Cariri/URCA. e-mail: flavio.franca@urca.br.

get an application that shows that any smooth regular simple plane curve is supported by its osculating circlines at 4 distinct points; two from inside and two from outside.

Keywords: Local-Global Theorem, The Moon in a Puddle Theorem, Closed curves

1 Introdução

O Teorema *The Moon in a Puddle* consiste em um dos mais significativo exemplo de um teorema local-global no contexto da geometria diferencial. Surpreendentemente, este teorema não é, pelo menos ainda, bem conhecido. Um dos objetivos deste trabalho é reparar essa omissão chamando atenção para este resultado.

2 Preliminares

Iniciamos apresentando alguns conceitos que serão importantes na sequência. Uma curva plana suave é uma aplicação diferenciável $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, definida num intervalo I. Quando $I = [a, b]$ e $\alpha(a) = \alpha(b)$, dizemos que α é fechada. Se α é injetiva em (a, b) dizemos ainda que α é simples. No que segue, vamos definir a curvatura de α.

Fixado um vetor unitário $v \in \mathbb{R}^2$, consideramos a função diferenciável que mede o ângulo entre cada vetor tangente à curva dada e v. A taxa de variação dessa função-ângulo num determinado ponto, constitui, então, uma medida de variação de direção da reta tangente numa vizinhaça desse ponto, e, portanto, uma legítima noção de curvatura. Mais precisamente, considere a função $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to S^1$ onde, S^1 é o círculo unitário do $\mathbb{R}^2$ centrado na origem. Note que

$$\gamma(t) \perp \gamma'(t)$$

ou seja,

$$\langle \gamma(t), \gamma'(t) \rangle = 0.$$

De fato, como $\|\gamma(t)\| = 1, \forall \in I$, então

$$\langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle = 1.$$

Derivando a igualdade acima, obtemos

$$\frac{d}{dt}\langle\gamma(t),\gamma(t)\rangle = \frac{d}{dt}(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle\gamma'(t),\gamma(t)\rangle + \langle\gamma(t),\gamma'(t)\rangle = 0.$$

Logo

$$2\langle\gamma(t),\gamma'(t)\rangle = 0.$$

Dizemos que θ é uma função ângulo de γ se $\gamma(t) = (\cos(\theta(t)), \operatorname{sen}\theta(t))$, $\forall t \in I$. Note que, se θ é uma função ângulo de γ então

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= (-\theta'(t)\operatorname{sen}(\theta(t)), \theta'(t)\cos(\theta(t)))\\ &= \theta'(t)(-\operatorname{sen}(\theta(t)), \cos(\theta(t)))\\ &= \theta'(t)J(\cos(\theta(t)), \operatorname{sen}(\theta(t)))\\ &= \theta'(t)J(\gamma(t)),\end{aligned}$$

onde $J : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é rotação por 90 graus no plano, ou seja, $J(x,y) = (-y,x)$. Portanto,

$$\gamma'(t) = \theta'(t)J(\gamma(t))$$

Tomando o produto interno com $J(\gamma(t))$, obtemos

$$\begin{aligned}\langle J(\gamma(t)),\gamma'(t)\rangle &= \langle\theta'(t)J(\gamma(t)), J(\gamma(t))\rangle\\ &= \theta'(t)\,\|J(\gamma(t))\|^2\end{aligned}$$

e concluímos que

$$\theta'(t) = \det(\gamma(t),\gamma'(t)).$$

Como consequência da relação acima, prova-se que qualquer função diferenciável $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to S^1$ possui uma função ângulo e quaisquer duas funções ângulo de γ diferem por uma constante. Isso nos permite definir curvatura como segue: Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco. A *curvatura* de α em $s \in I$ é definida por

$$\kappa(s) = \theta'(s)$$

onde θ é uma função ângulo de $\alpha' : I \subset \mathbb{R} \to S^1$. Para mais detalhes sobre a definição de curvatura via função ângulo, indicamos o livro [2].

3 Resultados

Nesta seção apresentaremos o enunciado e a prova do Teorema *The Moon in a Puddle.* Iniciaremos com o enunciado.

Teorema 1 *(The Moon in a Puddle) Seja γ uma curva plana simples e fechada. Se o módulo da curvatura de γ é limitado por 1 então a região limitada por γ possui um disco de raio 1.*

Apresentaremos a demonstração dada por A. Petrunin e S. Barrera em [1]. Cabe ressaltar aqui que o resultado análogo para superfícies não vale, ou seja, há um corpo sólido V no espaço Euclidiano limitado por uma superfície suave cujas curvaturas principais é limitada em valor absoluto por 1, tal que V não contém uma bola unitária.

Precisamos fixar mais uma nomenclatura. Uma aplicação $\alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\alpha(a) = \alpha(b)$ será chamada de *loop* de ponto base $\alpha(a)$. Um loop é suave, regular e simples se for suave e regular em $[a, b]$ e injetivo no intervalo aberto (a, b). Na nossa definição, o que diferencia um loop de uma curva é a singularidade (bico) que pode ocorrer no ponto base do loop.

No que segue, vamos usar o termo circline para abreviação de círculo ou reta. Observamos que o círculo osculador de uma curva regular suave é definida em cada um dos seus pontos como o círculo ou reta que intersecta a curva naquele ponto, é tangente e possui curvatura igual a curvatura da curva naquele ponto.

Suponha que γ é um loop plano, suave, simples e fechado. Dizemos que a circline σ suporta γ no ponto p se o ponto p está em ambas σ e γ e a circline σ está em uma das regiões fechadas delimitadas por γ no plano. Se, além disso, esta região é limitada, então dizemos que σ suporta γ por dentro. Caso contrário, dizemos que σ suporta γ por fora.

Lema. *Seja γ um loop plano, regular, suave e simples. Então existe um ponto de γ (diferente da base), onde seu círculo osculador σ suporta γ por dentro.*

Prova. Denotemos por F a região fechada e limitada cujo bordo é γ. Suponha, por contradição, que a proposição não é verdadeira, ou seja, para cada $p \in \gamma$, diferente do ponto base p_0 de γ, o círculo osculador σ de raio $\frac{1}{k(p)}$ que é tangente a γ em p não está contido em F. Fixado $p_0 \neq p \in \gamma$, vamos considerar o círculo maximal σ de γ em p, ou seja, σ satisfaz

i) σ é tangente a γ em p;

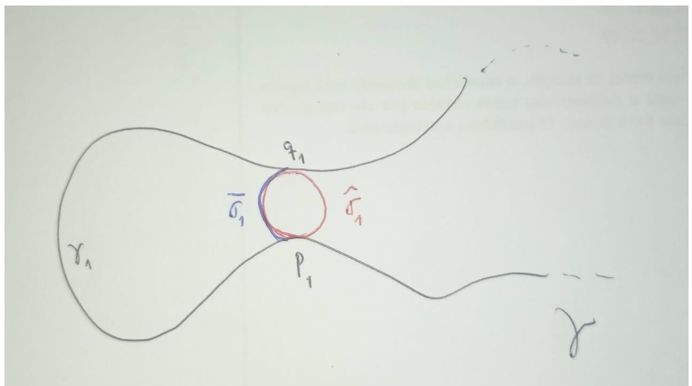
ii) σ está contido em F;

iii) σ é o círculo de maior raio com propriedades i) e ii).

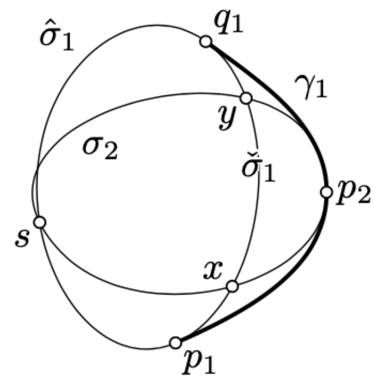
Chamaremos σ de incirclo de γ em p. Note que o raio r de σ é menor que $\frac{1}{k(p)}$, pois o círculo osculador de σ em p tem raio $\frac{1}{k(p)}$ e não está em F. Portanto a curvatura κ_σ do círculo σ é maior que a curvatura de γ em p, ou seja,

$$k_\sigma = \frac{1}{r} > k_\gamma(p).$$

Portanto, como σ e γ são tangentes em p, existe uma vizinhança de p em γ (e em σ), onde γ e σ intersectam-se apenas em p. Mais precisamente, há uma vizinhança de σ em p que está acima de γ. Note que σ necessariamente intersecta γ em um outro ponto além de p, pela condição (iii) acima. Fixada essa configuração, agora vamos começar a construir uma sequência de incircles (σ_n) como segue: Escolhemos um ponto $p_1 \neq p_0$ em γ e denotamos por σ_1 o incirclo de γ em p_1. Seja q_1 um outro ponto de σ_1 que está em γ. Vamos denotar por γ_1 um arco de γ entre p_1 e q_1. Vamos denotar por $\hat{\sigma}_1$ e $\bar{\sigma}_1$ os dois arcos de σ_1 que ligam p_1 e q_1 de tal modo que $\bar{\sigma}_1$ está contido da região delimitada pela união de γ_1 e $\hat{\sigma}_1$ (veja a figura abaixo).



Sejam q_2 o ponto médio de γ_1 e σ_2 o incircle de γ em p_2.
Afirmação: σ_2 não intersecta $\hat{\sigma_1}$.
De fato, suponhamos por contradição, que $\hat{\sigma}_1$ intersecta σ_2 no ponto s. Então existem $x, y \in \hat{\sigma}_1 \cap \sigma_2$, pois σ_2 está em F e como σ_2 é um círculo, há dois arcos de σ_2 ligando p_2 à s. Portanto, $\sigma_1 = \sigma_2$ uma vez que estes dois círculos possuem três pontos em comum, a saber, s, x e y. Por outro lado, por construção, $p_2 \in \sigma_2$ e $p_2 \notin \sigma_1$ - uma contradição.



Sabemos que σ_2 intersecta γ em outro ponto, além de p_2. Segue da afirmação acima que σ_2 não intersecta $\gamma \setminus \gamma_1$. Portanto, σ_2 intersecta γ_1 em um ponto q_2 diferente de p_2. Seja γ_2 um arco de γ_1 que parte de p_2 e vai até o primeiro ponto q_2 de interseção entre γ_1 e γ_2. Como p_2 é o ponto médio de γ_1, segue que

$$L(\gamma_2) < \frac{1}{2}L(\gamma_1).$$

Repetindo esse processo, ou seja, tomando p_3 o ponto médio do arco γ_2 e σ_3 o incircle de γ em p_3, e assim sucessivamente, obtemos uma sequência de arcos $\gamma_n, n \in \mathbb{N}$ de γ tais que

$$\gamma_1 \supset \gamma_2 \subset \gamma_3 \supset ... \supset \gamma_n \supset ...$$

e

$$\begin{aligned} L(\gamma_n) &< \frac{1}{2}L(\gamma_{n-1}) \\ &< \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}L(\gamma_{n-2})\right), \end{aligned}$$

ou seja,

$$L(\gamma_n) < \frac{1}{2^{n-1}}L(\gamma_1).$$

Em particular,

$$L(\gamma_n) \to 0 \text{ quando } n \to \infty.$$

Agora note que

$$\gamma_n = \bigcap_{k=1}^{n} \gamma_k$$

e como $L(\gamma_n) \to 0$, concluimos que

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \gamma_k = \{p_\infty\}. \qquad (I)$$

Sejam σ_∞ o incirclo de γ em p_∞ e q_∞ um outro ponto de σ_∞ que intersecta γ. Como $q_\infty \in \gamma_k, \forall k$, segue que $q_\infty \in \gamma_k, \forall k$, pela construção dos γ_k feita acima. Daí, segue de (I) que $p_\infty = q_\infty$ – uma contradicão.

Aplicando o Lema acima podemos demonstrar o Teorema *The Moon in a Puddle.*
Demonstração do Teorema 1. O lema acima garante que γ possui um ponto p onde o círculo osculador σ de γ em p está dentro da região delimitada por γ. Por hipótese, a curvatura $k(p)$ de γ em p satisfaz

$$|k(p)| \leq 1 \tag{3.1}$$

Logo, o raio do circulo σ satisfaz

$$r = \frac{1}{|k(p)|} \geq 1$$

Portanto, o disco delimitado por σ tem raio $r \geq 1$ e está dentro da região delimitada por γ. Logo, diminuindo o raio de σ, se necesário, obtemos um disco de raio 1 dentro da região delimitada por γ.

Aplicação: O Teorema dos Quatro Vértices. Inicialmente lembramos que o *vértice* de uma curva regular suave é definido como um ponto crítico da função curvatura da curva. Em particular, qualquer mínimo local (ou máximo) da curvatura é um vértice. Por exemplo, todo ponto do círculo é um vértice do mesmo.

O clássico Teorema dos Quatro Vértices diz que *qualquer curva plana regular suave fechada sem auto-interseções, tem pelo menos quatro vértices.* Há muitas provas e diferentes generalizações deste resultado. Aqui apresentaremos um esboço da prova do Teorema dos Quatro Vértices, utilizando o Teorema *The Moon in a Puddle* como ferramenta principal.

O fato fundamental que utilizaremos aqui é que se o círculo osculador σ em um ponto p de uma curva γ suporta γ (por dentro ou por fora), então p

é um vértice de γ. Portanto, o seguinte teorema é de fato uma generalização do Teorema dos Quatro Vértices:

Teorema 2 *Qualquer curva plana suave simples e fechada é suportada por seu círculo osculador em quatro pontos distintos; dois por dentro e dois por fora.*

Demonstração. Seja γ uma curva suave simples e fechada. De acordo com o Lema apresentado acima, há um ponto $p \in \gamma$ tal que seu círculo osculador suporta γ de dentro. A curva γ pode ser considerada um loop com p sendo sua base. Portanto, o lema garante a existência de outro ponto $q \in \gamma$ com a mesma propriedade. Isto mostra a existência de dois círculos oculadores que suportam γ por dentro. Resta mostrar a existência de dois círculos osculadores que suportam γ de fora. Aplicando uma inversão com relação a *sigma* à curva γ obtemos uma curva γ_1 que está na região delimitada por σ e, em particular, não intersecta γ. Argumentando como acima, concluímos que a curva γ_1, também tem dois círculos osculadores que a suportam por dentro.

Para concluir o resultado, basta observar que estes círculos osculadores de γ_1 são imagens pela inversão de círculos osculadores de γ que suportam γ por fora. De fato, o círculo osculador de γ em p pode ser definido como o único círculo que tem contato de segunda ordem com γ em p. Por outro lado, a inversão, sendo um difeomorfismo local longe do centro de inversão, não altera a ordem de contato entre as curvas. Finalmente, note que que a região ilimitada limitada por γ é mapeada na região limitada cujo bordo é γ_1. Portanto, esses dois círculos osculadores que suportam γ_1 por dentro, correspondem a dois círculos osculadores que suportam γ por fora.

4 Referências Bibliográficas

[1] Petrunin, A. and Barrera, S. Moon in a puddle and the four-vertex theorem. Arxiv: 2107.08455.
[2] Lima, Ronaldo Freire, “Introdução à Geometria Diferencial”. IV Colóquio de Matemática da Região Norte. SBM (RJ). 2016.