VI SEMANA UNIVERSITÁRIA DA URCA
XXIV SEMANA DE INICIAÇÃO
CIENTÍFICA DA URCA
13 a 17 de Dezembro de 2021
Tema: "Centenário de Paulo Freire: contribuição da divulgação científica e tecnológica em defesa da vida, da cidadania e da educação"

O PROBLEMA DE PLATEAU E AS SUPERFÍCIES MÍNIMAS

Henrique Bezerra Alcantara[1], **Jocel Faustino Norberto de Oliveira**[2]

Resumo

Por meio desse trabalho vamos definir o conceito de superfície mínima através do famoso problema de Plateau, usando alguns resultados da teoria das curvas e superfícies. O problema pode ser, a grosso modo, descrito da seguinte maneira: fixada uma curva, encontrar dentre todas as superfícies que contém esta curva, aquela cuja área determinada por ela e a curva, seja mínima. Veremos que as soluções para este problema resultam em superfícies cuja curvatura média se anula em todo lugar.

Palavras-chave: Problema de Plateau. Superfícies mínimas. Curvatura média.

1 Introdução

As superfícies mínimas são geralmente associadas as películas de sabão, que podem ser obtidas mergulhando uma moldura formada por um arame em uma solução de sabão e retirando-a em seguida com cuidado. Se o experimento for bem executado, obtém-se uma película de sabão que tem o arame como fronteira. Nesse trabalho, estudaremos o problema de Plateau, que foi motivado pela conexão entre as superfícies mínimas e películas de sabão, mostrando por considerações físicas, que a película assume a posição onde, em seus pontos regulares, a curvatura média é nula.

2 Objetivos

Apresentar o conceito de superfície mínima através do problema de Plateau, usando alguns resultados importantes no estudo de geometria diferencial das curvas e superfícies, para a demonstração do problema.

[1]Licenciatura em Matemática/URCA-PIBIC/URCA.E-mail:henrique.bezerra@urca.br
[2]DEMPA/URCA.E-mail:jocel.faustino@urca.br

3 Metodologia

Através do uso da dissertação: Tópicos de Geometria Diferencial, de Ricardo Alexandre Batista, definimos o conceito de superfície mínima por meio do problema de Plateau. Resultados importantes da geometria diferencial de curvas e superfícies são usados para a demonstração do problema.

4 Resultados

Definiremos o conceito de superfície mínima através do seguinte Problema:

4.1 O Problema de Plateau

Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular. Escolha um dominio limitado $D \subset U$ e uma função diferenciável $h : \tilde{D} \to \mathbb{R}$ onde $\tilde{D}$ é a união do dominio D e sua fronteira ∂D. A variação normal de $X(\tilde{D})$, determinada por h, é a aplicação $\varphi : \tilde{D} \times]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\varphi(u, v, s) = X(u, v) + sh(u, v)N(u, v); (u, v) \in \tilde{D}, s \in]-\varepsilon, \varepsilon[.$$

Para cada $s \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ fixado, a aplicação $X^s : D \to \mathbb{R}^3$ dada por $X^s(u, v) = \varphi(u, v, s)$ é uma superficie parametrizada com

$$\frac{\partial X^s}{\partial u} = X_u + sh_u N + shN_u$$
$$\frac{\partial X^s}{\partial v} = X_v + sh_v N + shN_v.$$

Os coeficientes da primeira forma fundamental são

$$E^s = \langle X_u^s, X_u^s \rangle = E + 2sh\langle X_u, N_u \rangle + s^2h^2\langle N_u, N_u \rangle + s^2h_u^2$$
$$F^s = \langle X_u^s, X_v^s \rangle = F + sh(\langle X_u, N_v \rangle + \langle N_u, X_v \rangle) + s^2h^2\langle N_u, N_v \rangle + s^2h_u h_v$$
$$G^s = \langle X_v^s, X_v^s \rangle = G + 2sh\langle X_v, N_v \rangle + s^2h^2\langle N_v, N_v \rangle + s^2h_v^2$$

fazendo

$$-e = \langle X_u, N_u \rangle$$
$$-2f = \langle X_u, N_v \rangle + \langle X_v, N_u \rangle$$
$$-g = \langle X_v, N_v \rangle$$

obtemos

$$E^s = E - 2she + s^2h^2\langle N_u, N_u \rangle + s^2h_u^2$$
$$F^s = F - 2shf + s^2h^2\langle N_u, N_v \rangle + s^2h_u h_v$$

$$G^s = G - 2shg + s^2h^2\langle N_v, N_v\rangle + s^2h_v^2.$$

Sabemos que a curvatura média é dada por

$$H = \frac{Eg - 2Ff + Ge}{2(EG - F^2)}.$$

Logo

$$\begin{aligned} E^sG^s - (F^s)^2 &= EG - F^2 - 2sh(Eg - 2Ff + Ge) + R \\ &= (EG - F^2) - 2sh[2H(EG - F^2)] + R \\ &= (EG - F^2)(1 - 4shH) + R \end{aligned}$$

onde $\lim_{s\to 0}(\frac{R}{s}) = 0$ pois todos os termos de R contém pelo menos um s^2. Portanto

$$\| X_u^s \times X_v^s \| = E^sG^s - (F^s)^2 = (EG - F^2)(1 - 4shH) + R$$

Segue-se que para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, X^s é uma superfície parametrizada regular pois

$$\lim_{s\to 0} \| X_u^s \times X_v^s \| = \lim_{s\to 0}(EG - F^2)(1 - 4shH) + R = EG - F^2 + \lim_{s\to 0} R$$

$$= EG - F^2 + \lim_{s\to 0} s\left(\frac{R}{s}\right) = EG - F^2 > 0.$$

Assim, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno

$$X_u^s \times X_v^s \neq \overrightarrow{0}.$$

Além disso, a área $A(s)$ de $X^s(\tilde{D})$ é

$$A(s) = \int\int_{\tilde{D}} \sqrt{E^sG^s - (F^s)^2}dudv = \int\int_{\tilde{D}} \sqrt{(EG - F^2)(1 - 4shH) + R}dudv$$

$$= \int\int_{\tilde{D}} \sqrt{(EG - F^2)(1 - 4shH) + \frac{R}{EG - F^2}(EG - F^2)}dudv$$

$$= \int\int_{\tilde{D}} \sqrt{(EG - F^2)(1 - 4shH + \overline{R})}dudv$$

onde $\overline{R} = \frac{R}{(EG - F^2)}$. Portanto,

$$A(s) = \int\int_{\tilde{D}} \sqrt{1 - 4shH + \overline{R}}\sqrt{EG - F^2}dudv.$$

Assim, para ε suficientemente pequeno, A é uma função diferenciável e sua derivada em $s = 0$ é calculada da seguinte forma:

$$A'(0) = \lim_{s\to 0} \frac{A(s)-A(0)}{s} = \lim_{s\to 0} \int\int_{\tilde{D}} \frac{(\sqrt{1-4shH+\overline{R}} - \sqrt{1+\overline{R}})\sqrt{EG-F^2}}{s} dudv$$

$$= \int\int_{\tilde{D}} \left(\lim_{s\to 0} \frac{\sqrt{1-4shH+\overline{R}} - \sqrt{1+\overline{R}}}{s} \right) \sqrt{EG-F^2} dudv.$$

Mas

$$\lim_{s\to 0} \frac{\sqrt{1-4shH+\overline{R}} - \sqrt{1+\overline{R}}}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{(\sqrt{1-4shH+\overline{R}} - \sqrt{1+\overline{R}})(\sqrt{1-4shH+\overline{R}} + \sqrt{1+\overline{R}})}{s(\sqrt{1-4shH+\overline{R}} + \sqrt{1+\overline{R}})}$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{1-4shH+\overline{R}-1-\overline{R}}{s(\sqrt{1-4shH+\overline{R}} + \sqrt{1+\overline{R}})} = \lim_{s\to 0} \frac{-4hH}{\sqrt{1-4shH+\overline{R}} + \sqrt{1+\overline{R}}} = -2hH.$$

Desde que $\lim_{s\to 0} \overline{R} = \lim_{s\to 0} \frac{R}{(EG-F^2)} = 0$ pois $\lim_{s\to 0} R = 0$.

Portanto

$$A'(0) = \int\int_{\tilde{D}} -2hH\sqrt{EG-F^2} dudv.$$

Dada uma curva γ em $\mathbb{R}^3$, consideremos para cada $s \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, a familia de superfícies parametrizadas regulares $X^s : D \to \mathbb{R}^3$ onde $D = int(\pi)$, com π uma curva simples fechada contida em U, tal que $\gamma = X^s \circ \pi$.

Então

$$A(s) = \int\int_{\tilde{D}} \sqrt{1-4shH+\overline{R}}\sqrt{EG-F^2} dudv.$$

Se a área determinada por $X = X^0$ e a curva γ é mínima dentre todas as superfícies que contém esta curva, então A deve ter um mínimo absoluto em $s = 0$. Assim, $A'(0) = 0$ para todas as famílias de superfícies como acima. Portanto $\int\int_{\tilde{D}} 2hH\sqrt{EG-F^2}dudv = 0$ para toda função diferenciável $h : \tilde{D} \to \mathbb{R}$.

Em particular, para $h : \tilde{D} \to \mathbb{R}$ dada por $h(q) = H(q), q \in \tilde{D}, hH = H^2$ e portanto $\int\int_{\tilde{D}} 2H^2\sqrt{EG-F^2}dudv = 0$ e como $\sqrt{EG-F^2} > 0$ e $2H^2\sqrt{EG-F^2} \geq 0$, isto só é possivel se $H \equiv 0$.

Isso sugere a seguinte definição:

Definição: Uma superfície **mínima** é uma superfície cuja curvatura média é identicamente nula.

Exemplo: Um catenóide é uma superfície gerada pela rotação da curva $x = \frac{1}{a}\cosh az$ no plano Oxz em torno do eixo Oz, onde a é uma constante não nula. Tomemos $a = 1$ por simplicidade.

O catenóide pode ser parametrizado por

$$X(u,v) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u), 0 < v < 2\pi, -\infty < u < \infty.$$

Então

$$N = \frac{X_u \times X_v}{\| X_u \times X_v \|} = (-sechu \cos v, -sechu \sin v, \tanh u)$$

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = \cosh^2 u, F = \langle X_u, X_v \rangle = 0, G = \langle X_v, X_v \rangle = \cosh^2 u$$

$$e = \langle N, X_{uu} \rangle = -1, f = \langle N, X_{uv} \rangle = 0, g = \langle N, X_{vv} \rangle = 1$$

com isso

$$H = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)} = \frac{(-1)\cosh^2 u + \cosh^2 u}{2(\cosh^2 u \cosh^2 u - 0^2)} = 0.$$

Portanto o catenóide é um exemplo de uma superfície mínima.

5 Conclusão

O problema de Plateau é um clássico problema na teoria das superfícies mínimas, que relaciona conceitos fundamentais da geometria diferencial. Nesse resumo definimos o conceito de superfície mínima através do problema, utilizando resultados importantes como a primeira forma fundamental para o cálculo de área e mostranto que essas superfícies possuem curvatura média nula. Podemos classificar o problema de Plateau como uma das principais formas de definir o conceito de superfície mínima.

6 Referências

Batista, Ricardo Alexandre. **Tópicos de Geometria Diferencial.** Dissertação (mestrado). Rio Claro. Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2011.

Lima, F.R. **Introdução à Geometria Diferencial.** 1ª edição. SBM, Macapá, 2016.

P. do Carmo, Manfredo. **Differential Geometry of Curves and Surfaces.** Rio de Janeiro, Brasil. Instituto de Matemática Pura e Aplicada(IMPA).

Tenenblat, Keti. **Introdução à Geometria Diferencial.** 2ª edição. São Paulo. Editora Edgard Blucher, 2011.