**VI SEMANA UNIVERSITÁRIA DA URCA**
**XXIV SEMANA DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA URCA**
*13 a 17 de Dezembro de 2021*
*Tema: "Centenário de Paulo Freire: contribuição da divulgação científica e tecnológica em defesa da vida, da cidadania e da educação"*

# APLICAÇÃO DE EDO's NO CÁLCULO DA VISCOSIDADE DO AR

**Carlos Felipe Ribeiro Sena**[1]; **Aureliana Belém Tavares**[2]; **José Tiago Nogueira Cruz** [3]

**Resumo**

Aplicações de EDO's são utilizadas rotineiramente em diversos problemas físicos. Um deles é o cálculo da viscosidade do ar, e como este apresenta certa resistência quando consideramos o arremesso de objetos. Esse problema teve grande relevância para os estudiosos antigos, tendo uma resposta consistente dada por Galileu e provada através da segunda lei de Newton, que nos mostra que a resistência do Ar é uma força que atua no sentido contrário do movimento de um objeto qualquer. Partindo do princípio fundamental da dinâmica, considerando o cálculo da força resultante e utilizando conceitos de EDO's como o método da variação de parâmetros para uma equação diferencial ordinária linear de segunda ordem não homogenia com coeficientes constantes, podemos encontrar uma solução para o problema em questão. Assim como prover resultados decorrentes de tal aplicação que podem ser vistos por exemplo em um saldo de paraquedas, o qual sofrerá a influência direta da resistência do ar.

**Palavras-chave:** EDO's. Resistência do Ar. Velocidade. Força.

# 1 Introdução

Com bastante frequência problemas da física necessitam da utilização de cálculos matemáticos para suas resoluções. Um exemplo de conceito bem exigido são as Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's) que se mostra uma ferramenta necessária em certas aplicações. Neste trabalho, veremos com detalhes como podemos solucionar um problema envolvendo a viscosidade do Ar utilizando a segunda lei de Newton a qual podemos modelar com conceitos matemáticos como de EDO's e através do método de resolução por variação de parâmetros conseguir chegar a um resultado consistente. Esse problema teve bastante relevância na Grécia antiga e foi formulada uma explicação consistente séculos depois.

# 2 Objetivos

Mostrar de maneira direta e objetiva uma aplicação das EDO's nos cálculos da viscosidade do ar, que é um problema frequentemente vistos na física e tem

[1]Licenciatura em Matemática/URCA-PIBIC/URCA.E-mail: feliperibeirosena@gmail.com
[2]Licenciatura em Matemática/URCA-PIBIC/URCA.E-mail: aureliana.belem@gmail.com
[3]DEMPA/URCA.E-mail: Jtncruz@hotmail.com

uma vasta aplicação. Exibindo como esse conceito da matemática pode ser útil em aplicações na física.

# 3 Metodologia

Iremos analisar como aplicações de EDO´s podem facilitara na solução de problemas envolvendo a Resistência do ar, esse tipo de problema foi proposto na Grécia antiga e tem relevância ate os dias atuais. Iremos partir de um ponto de vista físico e chegando a um resultado consistente. Para isso utilizaremos conceitos de EDO's para justificar as afirmações físicas.

## 3.1 Noções iniciais

Aristóteles acreditava que se lançassem dois objetos de uma mesma altura, um deles leve como uma pena e outro pesado como uma esfera de ferro, os seus tempos de queda seriam diferentes, para ele a esfera cairia mais rapidamente, pois devido a sua massa ela teria uma maior aceleração. Assim ele imaginava que quanto mais pesado um corpo, mais rápido ele chegaria ao solo. Galileu concluiu séculos depois que um corpo leve e outro pesado quando abandonados de uma mesma altura, caem simultaneamente no chão ao mesmo instante, ou seja, a diferença de massa desses corpos não influencia nas suas respetivas acelerações, o que vai diferenciar as taxas é a resistência do ar.

## 3.2 Aplicação com a utilização de EDO

Consideremos o lançamento vertical de um corpo onde seu deslocamento é verticalmente para cima, vamos incluir uma força de atrito $F_2$ agindo na direção oposta ao movimento, com $F_2 = -\alpha.v$, onde $v = \frac{dx}{dt}$ é a velocidade e $\alpha$ é uma constante que depende do meio e das dimensões do objeto. Pela segunda lei de Newton temos $F = m.a$, analisando as forças atuantes no sistema obtemos a força resultante $F_{res}$ sendo igual a soma da força peso $F_1$ com a resistência do ar $F_2$. Temos então $F_{res} = m.a$ onde $F_{res} = F_1 + F_2$ assim:

$$F_1 + F_2 = m.a$$

$$-m.g - \alpha.v = m.a \Rightarrow -g = \frac{\alpha}{m}.v + a$$

Lembrado que $v = \frac{dx}{dt}$ e $a = \frac{d^2x}{dt^2}$, tomando $\frac{\alpha}{m} = \beta$ temos: $\frac{d^2x}{dt^2} + \beta.\frac{dx}{dt} = -g$. Podemos reescrever a equação acima da seguinte forma:

$$x'' + \beta.x' = -g \tag{1}$$

A equação (1) é uma EDO linear de segunda ordem não homogenia com coeficientes constantes, então podemos aplicar o método de variação de parâmetro para resolvê-la. Vamos considerar as seguintes condições iniciais $x(0) = x_0$ e $x'(0) = v(0) = v_0$, Obtemos o problema de valor inicial a seguir:

$$\begin{cases} x'' + \beta.x' = -g, \\ x(0) = x_0, \\ x'(0) = v(0) = v_0. \end{cases}$$

Temos $x'' + \beta.x' = 0$ como sendo a EDO homogênea correspondente à EDO descrita em (1), onde $x'' + \beta.x' = 0$ tem $r^2 + \beta.r = 0$ como equação característica. O discriminante da equação característica é $\Delta > 0$, desta forma teremos duas raízes reais e distintas sendo elas $r_1 = 0$ e $r_2 = -\beta$. Sendo assim, a solução geral da homogênea tem a seguinte forma: $x = c_1e^{r_1t} + c_2e^{r_2t}$. Substituindo $r_1 = 0$ e $r_2 = -\beta$ na equação anterior teremos a solução geral da homogênea com a forma descrita abaixo

$$x(t) = c_1 + c_2e^{-\beta t} \tag{2}$$

Queremos encontrar através do método de variação dos parâmetros uma solução particular de (1) que também tenha o formato de solução geral para a homogênea. Desta forma podemos substituir os parâmetros constantes $c_1$ e $c_2$ por funções $u_1(t)$ e $u_2(t)$ que iremos determinar na equação (2), assim:

$$x(t) = u_1(t) + u_2(t).e^{-\beta t} \tag{3}$$

Derivando (3) em relação a $t$ obtemos: $x'(t) = u_1'(t) + u_2'(t).e^{-\beta t} - \beta.u_2(t).e^{-\beta t}$. Consideremos agora que

$$u_1'(t) + u_2'(t).e^{-\beta t} = 0 \tag{4}$$

Desta forma, $u_1'(t) = -u_2'(t).e^{-\beta t}$ e portanto, levando em consideração a equação (4) temos

$$x'(t) = -\beta.u_2(t).e^{-\beta t} \tag{5}$$

Derivando a equação (5) em relação a $t$ obtemos $x''(t) = \beta^2.u_2(t).e^{-\beta t} - \beta.u_2'(t).e^{-\beta t}$. Agora vamos substituir os valores de $x'(t)$ e $x''(t)$ na equação (1) para encontrarmos $u_2'(t)$.

$$\beta^2.u_2(t).e^{-\beta t} - \beta.u_2'(t).e^{-\beta t} + \beta(-\beta.u_2(t).e^{-\beta t}) = -g$$
$$\beta^2.u_2(t).e^{-\beta t} - \beta.u_2'(t).e^{-\beta t} - \beta^2.u_2(t).e^{-\beta t} = -g$$
$$-\beta.u_2'(t).e^{-\beta t} = -g \Rightarrow u_2'(t) = \frac{g.e^{\beta t}}{\beta}$$

pondo o valor de $u_2'(t)$ em $u_1'(t) = -u_2'(t).e^{-\beta t}$ temos: $u_1'(t) = -\frac{g.e^{\beta t}}{\beta}.e^{-\beta t} = -\frac{g}{\beta}$. Obtemos $u_1'(t) = -\frac{g}{\beta}$ e $u_2'(t) = \frac{g.e^{\beta t}}{\beta}$, integrando $u_1'(t)$ e $u_2'(t)$ em relação a $t$ teremos:

$$u_1(t) = \int -\frac{g}{\beta}dt = -\frac{g}{\beta}.t + k_1 \text{ e } u_2(t) = \int \frac{g.e^{\beta t}}{\beta}dt = \frac{g.e^{\beta t}}{\beta^2} + k_2$$

Agora vamos encontrar os valores das constantes $k_1$ e $k_2$. Consideremos $t = 0$ na equação (5), assim

$$x'(t) = -\beta.u_2(t).e^{-\beta t} = -\beta.(\frac{g.e^{\beta t}}{\beta^2} + k_2).e^{-\beta t}$$

$$x'(t) = -\frac{g}{\beta} - \beta.k_2.e^{-\beta t} \Rightarrow x'(0) = -\frac{g}{\beta} - \beta.k_2$$

Como $x'(0) = v(0) = v_0$, temos

$$v_0 = -\frac{g}{\beta} - \beta.k_2 \Rightarrow k_2 = -\frac{v_0}{\beta} - \frac{g}{\beta^2}$$

Substituindo os valores de $u_1(t)$ e $u_2(t)$ na equação (3) temos

$$x(t) = u_1(t) + u_2(t).e^{-\beta t} = -\frac{gt}{\beta} + k_1 + (\frac{ge^{\beta t}}{\beta^2} + k_2).e^{-\beta t}$$

$$x(t) = -\frac{gt}{\beta} + k_1 + \frac{g}{\beta^2} + k_2.e^{-\beta t} \tag{6}$$

Vamos utilizar uma condição inicial para encontrar o valor de $k_1$, consideremos $t = 0$, assim

$$x(t) = -\frac{gt}{\beta} + k_1 + \frac{g}{\beta^2} + k_2.e^{-\beta t}$$

$$x(0) = x_0 = k_1 + \frac{g}{\beta^2} + k_2 = k_1 + \frac{g}{\beta^2} - \frac{v_0}{\beta} - \frac{g}{\beta^2} \Rightarrow k_1 = x_0 + \frac{v_0}{\beta}$$

Determinado os valores de $k_1$ e $k_2$ pode-se substitui-los na equação (6),temos:

$$x(t) = -\frac{gt}{\beta} + k_1 + \frac{g}{\beta^2} + k_2.e^{-\beta t} = -\frac{gt}{\beta} + x_0 + \frac{v_0}{\beta} + \frac{g}{\beta^2} + (-\frac{v_0}{\beta} - \frac{g}{\beta^2}).e^{-\beta t}$$

$$x(t) = -(\frac{g}{\beta^2} + \frac{v_0}{\beta}).e^{-\beta t} + x_0 + \frac{g}{\beta^2} + \frac{v_0}{\beta} - \frac{gt}{\beta}$$

agrupando os termos semelhantes na equação acima obtemos que a solução da equação (1) é:

$$x_\beta(t) = \frac{g}{\beta^2}.(-e^{-\beta t} + 1 - \beta t) + \frac{v_0}{\beta}.(-e^{-\beta t} + 1) + x_0 \tag{7}$$

A equação (7) aparenta ser bem diferente da equação $x(t) = x_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2}$ que é uma das equações básicas do movimento com aceleração constante, bem utilizado em problemas de dinâmica que apresentam esse comportamento. No entanto, uma observação interessante é que ambas deverão se coincidir no limite quando $\beta \to 0$, já que a equação (1) se reduz a $x'' = -g$ quando $\beta \to 0$. De fato, calculando o limite de (7) aplicando a regra de L'Hospital temos:

$$\lim_{\beta\to 0} x_\beta(t) = \lim_{\beta\to 0}(\frac{gte^{-\beta t} - gt}{2\beta} + \frac{v_0.te^{-\beta t}}{1} + x_0) = \lim_{\beta\to 0}(-\frac{gt^2e^{-\beta t}}{2} + v_0.te^{-\beta t} + x_0)$$

$$\lim_{\beta\to 0} x_\beta(t) = -\frac{gt^2}{2} + v_0t + x_0 = x_0 + v_0t - \frac{gt^2}{2}$$

Podemos obter mais algumas informações de onde há influencia da resistência do ar se derivarmos a equação (7)

$$\frac{dx_\beta}{dt} = \frac{g}{\beta}.(e^{-\beta t} - 1) + v_0.e^{-\beta t}$$

Aplicando ao limite quando $t \to \infty$ percebemos que existe uma velocidade limite que sera $v_\infty = -\frac{g}{\beta}$, uma vez que $\lim_{t\to\infty} e^{-\beta t} = 0$.

# 4 Resultados

Com tudo que foi visto até agora, obtemos um importante resultado nos mostrando que apartir do fato de existir uma velocidade limite, temos que nessas condições, um corpo caindo verticalmente com velocidade inicial $v_0 = 0$ terá sua velocidade sempre inferior $v_\infty$ e sua velocidade tenderá para esse valor quando $t \to \infty$. Temos também que para valores apropriados da constante $\beta$ é possível garantir uma queda suave, fenômeno que ocorre na utilização de para-quedas.

# 5 Conclusão

Tendo em vista os argumentos apresentados percebemos que a matemática é uma ferramenta indispensável para problemas físicos, em especial o conceito de EDO é de fundamental importância para diversos resultados na área, com ele podemos encontrar uma reposta para um problema físico que impactou os estudiosos da época, a viscosidade do ar.

# Referências

[1] Santos,R.J. **Introdução as equações diferenciais ordinarias**. Minas Gerais, 2007

[2] Figueiredo,D.G; Neves,A.F. **Equações diferencias aplicadas**. 2ª edição. Rio de Janeiro:IMPA, 2001

[3] Cunha,L.M.**Estudo das Equações Diferencias e Aplicações em modelos na física**. Minas Gearia, 2021