

VI SEMANA UNIVERSITÁRIA DA URCA XXIV SEMANA DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA URCA

13 a 17 de Dezembro de 2021

Tema: "Centenário de Paulo Freire: contribuição da divulgação científica e tecnológica em defesa da vida, da cidadania e da educação"

O teorema de Meusnier para curvas no espaço

Samuel Albuquerque Ramalho¹, Jocel Faustino Norberto de Oliveira²

Resumo

Neste trabalho, abordaremos o Teorema de Meusnier, o qual nos permite falar em curvatura normal ao longo de uma dada direção. Para que possamos chegar no ponto principal, serão apresentados os pré-requisitos necessários da Geometria Diferencial, dentre eles, o triedro de Frenet, definições de curvatura normal e a segunda forma fundamental. Em seguida, traremos o teorema em questão juntamente com uma demonstração, que se baseia no significado geométrico da segunda forma fundamental.

Palavras-chave: Curvatura normal. Segunda forma fundamental. Teorema de Meusnier.

1 Introdução

O teorema de Meusnier é um intrigante teorema da Geometria Diferencial de curvas, pois relaciona de maneira simples o vetor velocidade das curvas em um certo ponto e a curvatura normal dessas curvas. Nosso trabalho consiste em uma apresentação que preza pela explicação geométrica de entes fundamentais na Geometria de curvas e superfícies, curvatura normal e segunda forma fundamental. Ao fim, apresentamos um simples exemplo para ilustrar os cálculos desses elementos.

2 Objetivos

Apresentar de maneira direta o teorema de Meusnier, pois é um resultado de Geometria Diferencial que envolve importantes conceitos geométricos, evidenciar os conhecimentos necessários para compreendê-lo e logo após mostrá-lo juntamente com uma demonstração, direta e concisa.

3 Metodologia

O trabalho teve como embasamento teórico a revisão bibliográfica, partindo de estudos desenvolvidos na área da Geometria Diferencial através do livro

¹Licenciatura em Matemática/URCA-PIBIC/URCA.E-mail: samuel.albuquerque@urca.br

²DEMPA/URCA.E-mail: jocel.faustino@urca.br

VI SEMANA UNIVERSITÁRIA DA URCA XXIV SEMANA DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA URCA

13 a 17 de Dezembro de 2021

Tema: "Centenário de Paulo Freire: contribuição da divulgação científica e tecnológica em defesa da vida, da cidadania e da educação"

Introdução à Geometria Diferencial, da autora Ketí Tenenblat, adquirimos os conhecimentos fundamentais na teoria de curvas diferenciáveis, visando assim adquirir os conhecimentos necessários para compreensão do Teorema de Meusnier.

4 Definições preliminares

Definição 1. Uma curva diferenciável parametrizada $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é chamada regular se $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$

Definição 2. Uma curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ está parametrizada pelo comprimento de arco, se e somente se, $\forall t \in I$ temos, $|\alpha'(t)| = 1$.

Definição 3. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco. A velocidade com que as retas tangentes mudam de direção é denominado de Curvatura de α , ou seja a curvatura de α em $s \in I$ é o número real, $k(s) = |\alpha''(s)|$

Definição 4. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco tal que $k(s) > 0$. O vetor binormal a α em s é

$$b(s) = t(s) \times n(s)$$

O referencial ortonormal $t(s), n(s), b(s)$ é o triedro de Frenet da curva α em s .

Definição 5. (Fórmulas de Frenet). Se $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma curva regular, parametrizada pelo comprimento de arco, e tal que $K(s) > 0$, $\forall s \in I$, então o triedro de Frenet definido por $t(s) = \alpha'(s)$, $n(s) = \frac{\alpha''(s)}{|\alpha''(s)|}$, $b(s) = t(s) \times n(s)$ satisfaz as equações

$$\begin{aligned} t'(s) &= k(s)n(s) \\ n'(s) &= -k(s)t(s) - \tau(s)b(s) \\ b'(s) &= \tau(s)n(s) \end{aligned}$$

que são denominadas fórmulas de Frenet.

Definição 6. (A segunda forma fundamental). Seja S uma superfície parametrizada regular em \mathbb{R}^3 e $p \in S$, a segunda forma quadrática de S em p é uma aplicação $II_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$II_p(w) = -\langle dN_p(w), w \rangle$$

VI SEMANA UNIVERSITÁRIA DA URCA XXIV SEMANA DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA URCA

13 a 17 de Dezembro de 2021

Tema: "Centenário de Paulo Freire: contribuição da divulgação científica e tecnológica em defesa da vida, da cidadania e da educação"

Onde dN_p é a derivada da aplicação normal de Gauss. Agora, considere uma curva α parametrizada pelo comprimento de arco e contida em uma superfície regular S , tal que $\alpha(s) = p$, $\alpha'(s)$ o vetor tangente a α em p e $k(s) = |\alpha''(s)|$ a curvatura de α em s . Seja θ o ângulo entre o vetor normal N a S em p , e $\alpha''(s)$, daí temos

Definição 7. A curvatura **normal** definida por α em $p \in S$ é dada por:

$$K_n = k \cos \theta = k \langle n, N \rangle = \langle \alpha''(s), N \rangle$$

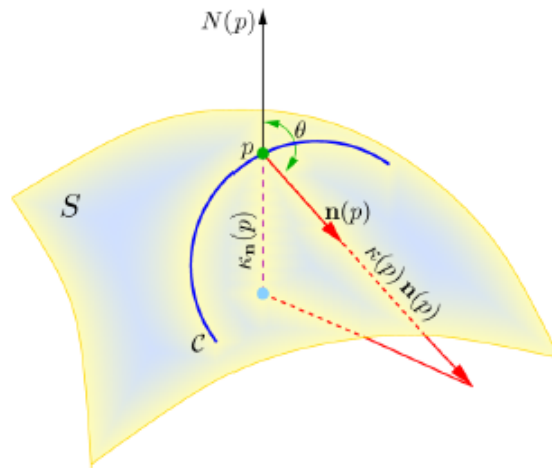


Figura 4.1: Curvatura normal. Fonte:[2]

Observamos assim, que k_n é o comprimento da projeção do vetor $\alpha''(s)$ sobre o vetor normal unitário N à superfície em p . Como k_n dá a componente do vetor curvatura $\alpha''(s)$ de α de acordo com a normal à superfície, para esses vetores colineares, ou seja, se a normal principal à curva α no instante s tiver a direção normal à superfície em $\alpha(s)$, então o valor absoluto de k_n é igual a curvatura de α nesse ponto.

5 Resultados

Teorema 1. (Meusnier) Todas as curvas que possuem o mesmo vetor velocidade em $p \in S$, possuem a mesma curvatura normal em p .

Demonstração. Seja $\alpha : I \rightarrow S$ uma curva regular em S parametrizada pelo comprimento de arco satisfazendo $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = w$. Denotando $N(s) = N(\alpha(s))$ a restrição do campo normal unitário à superfície S ao longo da curva α , temos

VI SEMANA UNIVERSITÁRIA DA URCA XXIV SEMANA DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA URCA

13 a 17 de Dezembro de 2021

Tema: "Centenário de Paulo Freire: contribuição da divulgação científica e tecnológica em defesa da vida, da cidadania e da educação"

$$\langle N(s), \alpha'(s) \rangle = 0,$$

para todo s ; derivando em relação a s e usando as relações de Frenet-Serret,

$$\begin{aligned} \langle N'(s), \alpha'(s) \rangle &= -\langle N(s), \alpha''(s) \rangle \\ &= -\langle N(s), k(s)n(s) \rangle \\ &= -k(s)\langle N(s), n(s) \rangle, \end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned} II_p(w) &= -\langle dN_p(w), w \rangle \\ &= -\langle N'(0), n(0) \rangle \\ &= k(0)\langle N(0), n(0) \rangle \\ &= K_n(p) \end{aligned}$$

Assim, podemos concluir que a curvatura normal k_n em $p \in S$ só depende da direção tangente à curva passando por p . \square

Note também que é por este resultado geométrico que utilizamos o sinal negativo na definição da **segunda forma fundamental**.

Uma ilustração desse Teorema pode ser observada na figura 5.1. Note que as curvas C e C_n têm a mesma curvatura normal em p ao longo de v .

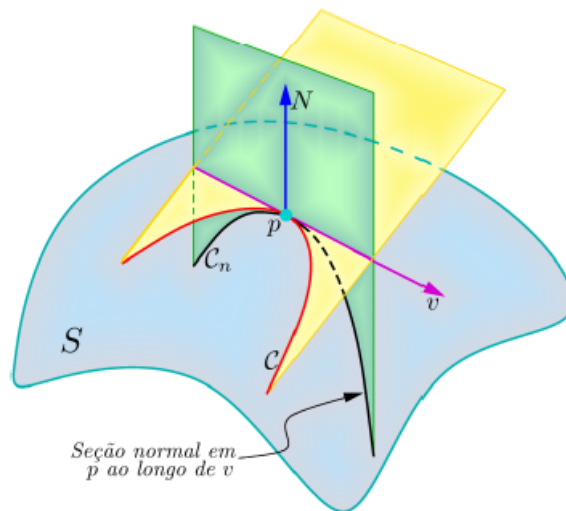


Figura 5.1: Representação do Teorema de Meusnier. Fonte : [2]

VI SEMANA UNIVERSITÁRIA DA URCA XXIV SEMANA DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA URCA

13 a 17 de Dezembro de 2021

Tema: "Centenário de Paulo Freire: contribuição da divulgação científica e tecnológica em defesa da vida, da cidadania e da educação"

Exemplo 5.1 Seja $X(u, v) = (r \cos u, r \sin u, u)$ com $r > 0$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, a superfície que descreve o cilindro circular. Calculando os coeficientes da primeira e segunda formas quadráticas de X , para um vetor $w = aX_u + bX_v \in T_qX$, com $q = (u, v)$, temos $I_q(w) = a^2r^2 + b^2$ e $II_q(w) = -a^2r$. Daí, verificamos que existem direções tangentes em que a função admite um máximo e um mínimo. Podemos concluir que para um vetor w não-nulo, temos

$$K_n(w) = \frac{-a^2r}{a^2r^2 + b^2}$$

Observando que $k_n(w) \leq 0$ e a igualdade $k_n(w) = 0$ ocorre se, e só se, $a = 0$ e $b \neq 0$. Se $a \neq 0$ então $k_n \leq \frac{1}{r}$. Portanto, $K_n \geq -\frac{1}{r}$ e essa última igualdade ocorre quando $b = 0$. Concluímos que a função k_n admite um máximo e um mínimo nas direções de X_v e X_u respectivamente.

6 Conclusão

Por meio de estudos das propriedades geométricas locais de uma superfície, que depende de duas formas quadráticas, relacionamos a curvatura de curvas da superfície através do conceito de curvatura normal. O teorema de Meusnier traz uma importante informação de curvas que definem o mesmo vetor tangente em um ponto p de uma superfície, através da curvatura normal, calculada fazendo uso da segunda forma fundamental em p .

Referências

- [1] CORDEIRO DE AMORIM MATOS, A. **GEODÉSICAS: SUAS EQUAÇÕES E ALGUMAS APLICAÇÕES**. Dissertação (Mestrado em Matemática) - PROFMAT, Departamento de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS). Bahia, Feira de Santana, p. 70. 2016.
- [2] DELGADO, J.; FRENSEL, K. **Geometria Diferencial I**. Versão digital. Rio de Janeiro, Niterói, p. 393.
- [3] TENENBLAT, K. **Introdução à Geometria Diferencial**. 2ª edição. São Paulo, Editora Edgard Blücher, 2011.
- [4] NUNES, B. **Geometria Diferencial de Superfícies e o Teorema de Gauss-Bonnet**. Trabalho de conclusão de curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). Santa Catarina, Florianópolis, p. 122. 2010.