VI SEMANA UNIVERSITÁRIA DA URCA
XXIV SEMANA DE INICIAÇÃO
CIENTÍFICA DA URCA
13 a 17 de Dezembro de 2021
Tema: “Centenário de Paulo Freire: contribuição da divulgação científica e tecnológica em defesa da vida, da cidadania e da educação”

PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO: UMA APLICAÇÃO DA DERIVADA

Antonia Nara de Alencar[1], José Augusto Pereira Nogueira[2]

Resumo: A matemática é uma ciência que surgiu com o desenvolvimento da humanidade e está em constante transformação. Desde então, são inúmeras as descobertas e mudanças ocorridas ao longo do tempo. Atualmente diversas áreas da Ciência abrangem a mesma, o que antes era desenvolvido apenas na matemática hoje é colocado em prática nas diferentes situações do cotidiano. São vários os ramos da Matemática, uma delas é o Cálculo Diferencial e Integral que foi desenvolvido através do estudo de Newton e Leibniz considerados os pioneiros do mesmo, daí em diante vem sendo reconstruído e reinventado cada vez mais. Neste trabalho, de cunho bibliográfico, estudaremos sobre uma aplicação importante das derivadas, os problemas de otimização. Para isto, veremos alguns conceitos que nos auxiliarão no entendimento dos problemas, como a definição de função crescente e decrescente, máximos e mínimos e os testes de primeira e segunda derivada. Por fim, faremos exemplos práticos, envolvendo área e volume, encontrados no dia a dia.

Palavras-chave: Derivadas. Máximos. Mínimos. Otimização.

1. Introdução

O Cálculo Diferencial e Integral surgiu através do estudo de dois dos grandes nomes das Ciências: Newton e Leibniz. Este ramo da matemática estuda sobre os conceitos de Limites, Derivadas e Integrais, os quais podem ser aplicados ao cálculo de áreas e volumes e também problemas de otimização (máximos e mínimos). Nossos estudos se darão sobre aplicações da derivada, mais especificamente sobre problemas de otimização.

O estudo das derivadas se inicia na sua interpretação geométrica.

> “[...] a interpretação geométrica de derivada de uma função é a inclinação da reta tangente ao gráfico da função em um ponto. Esse fato possibilita-nos aplicar derivadas como recurso auxiliar no esboço de gráficos. Por exemplo, podemos usar a derivada para determinar os pontos onde a reta tangente é horizontal; esses são os pontos onde a derivada é zero. A derivada também pode ser usada para encontrarmos os intervalos nos quais a função está acima ou abaixo da reta tangente.” (LEITHOLD, 1994, p. 217).

---

1 Universidade Regional do Cariri, email: antonia.nara@urca.br
2 Universidade Regional do Cariri, email: augusto.nogueira@urca.br

A partir dessas utilizações da derivada de uma função, podemos determinar quais são os valores máximos e mínimos que esta função pode atingir em um determinado intervalo.

Os problemas de otimização têm por finalidade encontrar uma solução eficiente a partir dos dados fornecidos inicialmente. Nesse trabalho veremos a definição de derivadas, além de outros conceitos essenciais para o seu desenvolvimento, e também faremos exemplos que demonstram a aplicabilidade da otimização na nossa realidade, que é algo que está presente no nosso cotidiano e que por vezes não percebemos.

2. Objetivo

Temos por objetivo mostrar uma aplicação das derivadas através de problemas de otimização. Mais especificamente, daremos exemplos de situações que podemos encontrar no cotidiano envolvendo máximos e mínimos de uma função, através de área e volume.

3. Metodologia

Este trabalho é uma pesquisa bibliográfica e, portanto, fez-se necessário o estudo sobre artigos, livros e materiais dispostos na internet sobre o tema abordado, que é a Derivada de uma função real e suas aplicações, mais especificamente o estudo de máximos e mínimos de uma função através de problemas de otimização.

A seguir veremos as definições e conceitos necessários para os estudos de máximos e mínimos, os quais foram retirados de LARSON, 2016.

Definição 1 (Função Crescente e Decrescente). Seja f uma função definida em um intervalo I e $x_1, x_2 \in \mathrm{I}$.
(i) f é crescente em I quando $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.
(ii) f é decrescente em I quando $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Definição 2 (Ponto crítico). Se f está definida em c, dizemos que c é um ponto crítico se $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe.

Teorema 1 (Teste da primeira derivada). Seja f contínua no intervalo (a, b), no qual c é o único número crítico. Se f for derivável no intervalo (exceto, possivelmente em c), então $f(c)$ pode ser classificado como um mínimo relativo, máximo relativo ou nenhum dos dois.
(i) Se no intervalo $(a, b), f'(x)$ é negativa a esquerda de $x = c$ e positivo a direita de $x = c$, então $f(c)$ é um mínimo relativo.
(ii) Se no intervalo $(a, b), f'(x)$ é positivo a esquerda de $x = c$ e negativo a direita de $x = c$, então $f(c)$ é um máximo relativo.
(iii) Se no intervalo $(a, b), f'(x)$ é positiva em ambos os lados de $x = c$ ou negativo em amos os lados de $x = c$, então $f(c)$ não é um extremo relativo de f.

Definição 3 (Extremos relativos ou locais). Seja f uma função definida em c.
(i) $\mathrm{f(c)}$ é um máximo relativo de f se houver um intervalo $(\mathrm{a,b})$ contendo c tal que $\mathrm{f(x)} \leq \mathrm{f(c)}$ para todo x em $(\mathrm{a,b})$.
(ii) $\mathrm{f(c)}$ é um mínimo relativo de f se houver um intervalo $(\mathrm{a,b})$ contendo c tal que $\mathrm{f(x)} \geq \mathrm{f(c)}$ para todo x em $(\mathrm{a,b})$.
Se $\mathrm{f(c)}$ é um extremo relativo de f, então se diz que o extremo relativo ocorre em $\mathrm{x = c}$.

Definição 4 (Extremos absolutos ou globais). Suponha que f esteja definida em um intervalo I contendo c,
(i) $\mathrm{f(c)}$ é um máximo absoluto de f em I se $\mathrm{f(c)} \leq \mathrm{f(x)}$ para cada x em I.
(ii) $\mathrm{f(c)}$ é um mínimo absoluto de f em I se $\mathrm{f(c)} \geq \mathrm{f(x)}$ para cada x em I.
Os valores de máximos e mínimos absolutos, são simplesmente chamados de máximos e mínimos de f em I.

Teorema 2 (Teste da segunda derivada). Suponha que $\mathrm{f'(c) = 0}$ e que f" exista em um intervalo aberto contendo c.
(i) Se $\mathrm{f''(c)} = 0 > 0$, então $\mathrm{f(c)}$ é um mínimo relativo.
(ii) Se $\mathrm{f''(c)} = 0 < 0$, então $\mathrm{f(c)}$ é um máximo relativo.
(iii) Se $\mathrm{f''(c)} = 0$, então o teste falha. Em tais casos, é possível usar o teste da primeira derivada para determinar se $\mathrm{f(c)}$ é um mínimo relativo, um máximo relativo ou nenhum dos dois.

4. Resultados

Veremos a seguir alguns problemas de otimização que podem ser encontrados no cotidiano.

Exemplo 1 (Otimização de Área). Seu Joaquim quer construir um cercado para criação de galinhas, com formato retangular de 600 m^2. Três dos lados serão construídos de arame a um custo de R$14,00 por metro e o quarto lado de tijolos e cimento a um custo de R$28,00 por metro. Quais dimensões minimizarão o custo para seu Joaquim?

Solução: Vamos considerar para a resolução um retângulo de base medindo x m e largura medindo y m. Três desses lados custam R$ 14,00, então o custo será: $14x + 14y + 14y$. E o quarto lado terá custo de: $28x$. Assim, o custo total será: $C = 14x + 14y + 14y + 28x = 42x + 28y$.
Como a área do terreno é 600 m^2 e sabemos que a área do retângulo é dada por $A = x * y$, então $600 = x * y$. Isolando a variável y, temos $y = \frac{600}{x}$.
Substituindo na função do custo: $C(x) = 42x + 28\left(\frac{600}{x}\right) \Rightarrow C(x) = 42x + \frac{16.800}{x}$
Agora derivamos a função custo e igualamos a 0 (zero) para determinar os pontos críticos $C'(x) = 42 - \frac{16.800}{x^2}$
Logo,$C'(x) = 0 \Rightarrow 42 - \frac{16.800}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{16.800}{x^2} = 42 \Rightarrow 42x^2 = 16.800 \Rightarrow x^2 = \frac{16800}{42}$

$$\Rightarrow x^2 = 400 \Rightarrow x = \pm\sqrt{400} \Rightarrow x = \pm 20$$

Por se tratar de medidas escolhemos $x = 20\,m$. Para saber se este valor é realmente o ponto de mínimo, basta utilizar o teste da segunda derivada. Assim, calculando a derivada segunda da função custo, obtemos

$$C''(x) = \frac{33600}{x^3}$$

Aplicando $x = 20$, $C''(20) = \frac{33600}{20^3} = \frac{33600}{8000} = 4{,}2 > 0$. Portanto, $x = 20$ é o ponto de mínimo. Se $x = 20m$, então $y = \frac{600}{x} = \frac{600}{20} = 30\,m$.
Essas dimensões determinam o custo mínimo para a construção do cercado. Para encontrar o valor mínimo, basta substituir os valores encontrados na função do custo total e descobrir o valor que será pago por seu Joaquim:

$$\boldsymbol{C = 42x + 28y = 42 * 20 + 28 * 30 = 840{,}00 + 840{,}00 = \ 1.680{,}00}$$

Exemplo 2 (Otimização de Volume). Pensando numa possível seca, um fazendeiro resolveu construir uma cisterna que fornecerá água para os animais presente em determinado cercado. Ele observou que 10.000 L de água seriam suficientes para suprir as necessidades desses animais e que desejaria construí-la a um preço acessível. Quais as possíveis medidas do raio e da altura dessa cisterna, sabendo que ela possuirá formato cilíndrico e que não precisará de tampa?
Solução: O fazendeiro precisa construir uma cisterna cilíndrica (aberta superiormente) para comportar 10000 L de água. Como $1000L = 1m^3 \Rightarrow 10000L = 10m^3$. Ou seja, o volume da cisterna deve ser 10 m^3. Assim, deseja-se descobrir as dimensões do raio e da altura da cisterna para que o custo seja mínimo. Temos que $Área\ do\ cilindro = Área\ da\ base + Área\ lateral = \pi r^2 + 2\pi rh$. E o volume é dado por $V = A_b * h = \pi r^2 h$
Como $V = 10 \Rightarrow 10 = \pi r^2 h \Rightarrow h = \frac{10}{\pi r^2}$. Substituindo na fórmula da área, teremos

$$A(r) = \pi r^2 + 2\pi rh = \pi r^2 + 2\pi r\,\frac{10}{\pi r^2} = \pi r^2 + \frac{20}{r}$$

Derivando a função da área e igualando a zero, obtemos os pontos críticos,

$$A'(r) = 0 \Rightarrow 2\pi r - \frac{20}{r^2} = 0 \Rightarrow 2\pi r = \frac{20}{r^2} \Rightarrow 10 = \pi r^3 \Rightarrow r^3 = \frac{10}{\pi} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}$$

Observe que

$$A''(r) = 2\pi + \frac{40}{r^3} = 2\pi + \frac{40}{\left(\sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}\right)^3} = 2\pi + \frac{40\pi}{10} = 2\pi + 4\pi = 6\pi > 0$$

Logo, o raio encontrado é o ponto de mínimo. Fazendo $\pi = 3{,}14$, temos que o raio será: $r = \sqrt[3]{\frac{10}{3{,}14}} = 1{,}47126$ e altura será $h = \frac{10}{3{,}14*(1{,}47126)^2} = 2{,}16461$.
Portanto, as medidas do raio e da altura da cisterna para que o fazendeiro tenha

o custo mínimo na construção serão de aproximadamente 1,47 m e 2,16 m, respectivamente.

5. Conclusão

Atualmente, busca-se apresentar a matemática como uma área que pode ser utilizada no nosso dia a dia e desmistificar a ideia de que é uma ciência pronta e acabada e que normalmente não se usa além das barreiras escolares. O Cálculo Diferencial e Integral, vem se mostrando uma excepcional aliada nessa transformação, uma vez que se mostra cada vez mais eficiente na descoberta de novos métodos que auxiliam nos problemas rotineiros, que normalmente não teriam tanta importância para a matemática.

Nota-se a presença do Cálculo Diferencial e Integral nas mais diversas áreas em que na maioria das vezes era inimaginável trabalhar, que possui sua eficácia e com a modelagem dos problemas de otimização podemos chegar a resoluções importantes de modo rápido e nos diversos campos de pesquisa e produção.

Dessa forma, vemos o quanto a matemática bem como as derivadas são essenciais para o desenvolvimento humano. Que vai desde a problemas simples como o cálculo do custo mínimo em relação a construção em determinada área até a procura de medidas importantes, considerando o contexto e as informações fornecidas pelo problema.

6. Agradecimentos

Agradecemos a URCA e aos recursos de financiamento do FECOP pela concessão da bolsa do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC).

7. Referências

LARSON, R., **Cálculo Aplicado**: um curso rápido, 9ª ed. São Paulo, SP, Cengage Learning, 2016.

LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica** volume 1, 3ª ed. São Paulo, HARBRA ltda, 1994.

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA Notas de Aula **Um pouco sobre a história do Cálculo**. Disponível em: http://mat.ufpb.br/~lenimar/histcalc.htm. Acesso em: 06 nov. 2021.