VI SEMANA UNIVERSITÁRIA DA URCA
XXIV SEMANA DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA URCA
13 a 17 de Dezembro de 2021
Tema: "Centenário de Paulo Freire: contribuição da divulgação científica e tecnológica em defesa da vida, da cidadania e da educação"

O USO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAS ORDINÁRIAS PARA RESOLVER PROBLEMAS RELACIONADOS A VELOCIDADE E ACELERAÇÃO

Aureliana Belém Tavares[1];**Carlos Felipe Ribeiro Sena**[2]; **José Tiago Nogueira Cruz** [3]

Resumo: O presente trabalho trata de algumas aplicações de equações diferencias ordinárias (EDO) na física, são elas: função horária da posição; função horária da velocidade e a equação de Torriceli, todas pertencentes ao movimento uniformemente variado (M.U.V). Além disso, é análisado o lançamento de um objeto obliquamente, com trajetória descrita por uma parábola, no qual são consideradas somente duas forças atuando sobre ele, força do impulso inicial e a força peso, fazendo uso dos conteúdos de derivadas, integrais e equações diferenciais ordinárias lineares para responder o problema proposto. O problema apresentado é objeto de estudo da balística em física mecânica, voltada principalmente para a análise do trajeto percorrido no lançamento de projetéis de armas de fogo.

Palavras-chave: velocidade intantânea. aceleração intantânea. lançamento oblíquo.

1 Introdução

O lançamento de objetos sobre a Terra, ficam a mercêr de 3 forças, a força utilizada para iniciar o movimento, a força de resistência do ar e a foça peso, segundo a segunda Lei de Newton (Princípio Fundamental da Dinâmica) contida em sua obra prima *Principia*, temos que o módulo da força aplicada pode ser dado pelo produto entre a aceleração e a masa (m) do objeto, sabendo que a aceleração da gravidade é aproximandamente $g = 9,8m/s^2$, valor da aceleração que atraí os objetos para a terra, a força peso pode ser dada por $P = -gm$.

O sinal negatico se dá pelo fato de que, a força peso se encontra oposta a força utilizada inicialmente para lançar o objeto para cima.

O lançamento oblíquo é objeto de estudo da balística, área da física mecânica que estuda o movimento de projetéis, principalmente a trajetória de balas de armas de fogo, faz uso das grandezas físicas velocidade e aceleração instantâneas, que são respectivamente, derivada de primeira ordem e de segunda ordem da função que determina a posição do objeto em movimento. Neste artigo, vamos trabalhar com um lançamento oblíquo onde sobre o objeto somente atuam duas forças, a força de impulso inicial e a força peso a responsável pelo encerramento do movimento. Para um pleno entendimento do problema abordado é necessário conhecimentos sobre derivadas, integrais e equações diferenciais ordinárias (EDO) lineares.

[1]Licenciatura em Matemática/URCA-PIBIC/URCA.E-mail: aureliana.belem@gmail.com
[2]Licenciatura em Matemática/URCA-PIBIC/URCA.E-mail: feliperibeirosena@gmail.com
[3]DEMPA/URCA.E-mail: Jtncruz@hotmail.com

2 Preliminares

Se faz necessário estabelecer a difirença entre velocidade e aceleração, médias e instantâneas. Inicialmente considere o deslocamento de um corpo, descrito entre as variáveis t (tempo) e x (comprimento percorrido), a velocidade média ou média da velocidade é dada pela divisão entre a variação do comprimento pela variação do tempo. Sendo x_f posição final, x_i posição inicial, t_f tempo final e t_i tempo inicial, como x depende da variável t, temos a equação

$$V_m = \frac{x(t_f) - x(t_i)}{t_f - t_i}. \tag{1}$$

A velocidade instantânea é a velocidade do corpo em determinado instante t, ou seja, cada posição x está associado a um intante de tempo t, então como calcular a sua velocidade exatamente no instante t?

Para descobrirmos tal velocidade vamos escolher $t_i = t$ e $t_f = t + \Delta t$ o mais próximo possível do instante t, ou seja, $t_f \to t^+$. Portanto, $\Delta t = t_f - t \to 0$.

Dessa forma, temos que a velocidade instantânea no instante t é dada por,

$$V(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t_f) - x(t)}{\Delta t} = x'(t) \tag{2}$$

Sobre a aceleração média, sabemos que ela é obtida através da divisão entre a variação da velocidade pela variação do tempo

$$a_m = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V_f - V_i}{t_f - t_i}$$

Sendo V_f e V_i as velocidades nos intantes t_f e t_i, respectivamente, a aceleração instantânea é obitidada de forma semelhante a velocidade intantânea, ou seja, queremos encontrar o valor da aceleração no instante t, com $t_i = t$ e $t_f \to t^+$, $\Delta t \to 0$

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} a_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{V(t + \Delta t) - V(t)}{\Delta t}$$

Portanto,

$$a(t) = V'(t) = x"(t) \tag{3}$$

3 Alguns resultados que envolvem velocidade e aceleração

3.1 Função horária da velocidade no M.U.V

Movimento Uniformemente Variado (M.U.V) é caracterizado por possuir a aceleração instantânea constante igual a a. Assim, a equação (3) se transforma na EDO

$$a = \frac{dv}{dt}. \tag{4}$$

A EDO (4) é separável. Resolvendo-a, encontramos a solução

$$V_f = V_i + a \cdot \Delta \tag{5}$$

A equação (5) é conhecida como função horária da velocidade. Em particular, se $t_i = 0$, obtemos a equação clássica

$$V_f(t) = V_i + at. \tag{6}$$

3.2 Função horária do espaço no M.U.V

Substituindo (6) em (2) e considerando $t_i = 0$ e $t_f = t$ obtemos

$$dx = (V_i + at)dt. \tag{7}$$

Lembrando que V_i e a aceleração são constantes, a solução da EDO (7) é conhecida como equação da função horária de posição

$$x_f = x_i + V_i t + a\frac{t^2}{2}. \tag{8}$$

3.3 Equação de Torriceli no M.U.V

Elevando (6) ao quadrado

$$V^2 = V_i^2 + 2atV_i + a^2t^2. \tag{9}$$

Da equação (8) obtemos

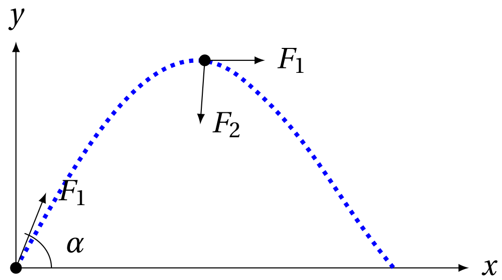
$$\underbrace{x_f - x_i}_{\Delta x} = V_i t + a\frac{t^2}{2} \tag{10}$$

Substituindo (10) em (9) obtemos a equação de Torriceli.

$$V^2 = V_i^2 + 2a\Delta x. \tag{11}$$

3.4 Lançamento de objetos obliquamente

Considere o lançamento de um objeto de massa igual a m, com trajetória descrita pelo gráfico abaixo, com o eixo y perpendicular ao solo e o eixo x paralelo



Se desprezarmos a resistência do ar, temos somente duas forças agindo sobre o objeto sendo elas F_1 a força aplicada para iniciar o movimento e F_2 a força peso $F_2 = -gm$. Observe que, a força que gera o movimento F_1 possui em sua direção uma certa inclinação com o eixo x, denotado aqui por α.

Pela segunda Lei de Newton $F_1 = a_1 m$, sendo a_1 a aceleração correspondente a força aplicada inicialmente, como F_1 é uma força que possui inclinação com o eixo x, ela pode ser decomposta em duas forças

$$F_{1x} = a_1 mcos(\alpha) \qquad \text{e} \qquad F_{1y} = a_1 msen(\alpha).$$

Dessa forma, temos como força resultante das forças horizontais F_{rx} e das verticais F_{ry} dadas por

$$F_{rx} = F_{1x} = ma_1 cos(\alpha) \qquad \text{e} \qquad F_{ry} = F_{1y} + F_2 = ma_1 sen(\alpha) - gm.$$

Como F_{rx} e F_{ry} são forças, temos pela segunda Lei de Newton que

$$F_{rx} = ma_x \Longleftrightarrow F_{rx} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$F_{rx} = ma_y \Longleftrightarrow F_{ry} = m\frac{d^2y}{dt^2}$$

Assim,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a_1 \cos(\alpha) \qquad \text{e} \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = a_1 \operatorname{sen}(\alpha) - g$$

Denotemos por $S = (x(t), y(t))$ o vetor posição do objeto. Como

$$a_T = (a_1 \cos(\alpha), a_1 \operatorname{sen}(\alpha) - g) \qquad \text{e} \qquad V_T = (v_1 \cos(\alpha), v_1 \operatorname{sen}(\alpha) - gt)$$

temos

$$S = (x(t), y(t)) = \left(S_1 cos(\alpha), S_1 sen(\alpha) - g\frac{t2}{2}\right) \Longleftrightarrow y(t) = xtg(\alpha) - g\frac{t^2}{2}$$

Note que não há aceleração ou desaceleração sobre o corpo em relação a força horizontal, assim como também não existe uma variação em sua velocidade. Por esse motivo a aceleração relacionada a força F_{rx} é nula, dessa maneira $a_1 = 0$. Assim,

$$y = -\frac{g}{2v_1^2 cos^2(\alpha)} x^2 + tg(\alpha) \cdot x.$$

A função y é uma parábola que toca o eixo x em $x_0 = 0$ e

$$x_f = \frac{2tg(\alpha) v_1^2 cos^2(\alpha)}{g}.$$

Além disso, $y(\frac{x_0 + x_f}{2})$ é o valor máximo de y e o tempo que o objeto chega ao chão é $\frac{2v_1 sen(\alpha)}{g}$.

4 Conclusão

De acordo com o proposto no inicio do trabalho, são expostas alguns resultados que fazem o uso de aceleração e velocidade instantâneas, principalmente a interferência de tais grandezas físicas em um lançamento oblíquo, fazendo uso dos conteúdos de equações diferenciais ordinárias (EDO) lineares, para resolver o problema proposto, sendo assim, possível determinar uma parábola que relaciona as variáveis $x(t)$ e $y(t)$, variáveis que estabelecem a posição em que se encontra o objeto lançado obliquamente.

Referências

CUNHA L. M., **Estudo das Equações Diferenciais e Aplicações em Modelos na Física**, Ouro Preto - MG, 2021.

STRATHERN P., **Newton e a gravidade em 90 minutos**, Le Livros, 1998.