V SEMANA UNIVERSITÁRIA DA URCA
XXIII Semana de Iniciação Científica
07 a 11 de Dezembro de 2020
Tema: "Os impactos e desafios da pandemia pela COVID-19 no ensino, pesquisa e extensão"
ISSN 1983-8174

TEOREMA DE FENCHEL

Henrique Bezerra Alcântara[1], **Jocel Faustino Norberto de Oliveira**[2]

Resumo

Neste trabalho abordamos o teorema de Fenchel, lembrando alguns conceitos básicos da teoria das curvas regulares do plano $\mathbb{R}^2$, bem como do espaço $\mathbb{R}^3$. Essas curvas, caracterizam-se por admitir, em cada um de seus pontos, uma reta tangente, o que nos conduzirá ao fundamental conceito de curvatura de curva. Essa abordagem viabiliza a introdução de conceitos geométricos, e através desses conceitos, aplicando ao caso da indicatriz tangente de uma curva de espaço fechado, deduzimos o teorema de Fenchel.

Palavras-chave: Curvas. Teorema de Fenchel. Fórmula de Crofton.

1 Introdução

Na teoria de curvas diferenciáveis no plano e no espaço, alguns teoremas ocupam destaque devido suas aplicações em diversos outros resultados. Podemos citar o teorema fundamental da teoria das curvas e a fórmula de Crofton como exemplos desses teoremas centrais. Neste trabalho, usamos as principais definições e alguns desses teoremas, como base para o entendimento da prova do Teorema de Fenchel. Este teorema, é um resultado global que utiliza diretamente a fórmula de Crofton em uma curva fechada no espaço. A ideia é apenas relacionarmos o teorema principal do trabalho com resultados já conhecidos da teoria local de curvas no plano e no espaço.

2 Objetivos

Apresentar o teorema de Fenchel, invocando alguns resultados importantes no estudo de geometria diferencial das curvas, para compreensão da demonstra ção do teorema.

[1]Licenciatura em Matemática/URCA-PIBIC/URCA.E-mail:henrique.bezerra@urca.br
[2]DEMPA/URCA.E-mail:jocel.faustino@urca.br

ISSN 1983-8174

3 Metodologia

Através do uso dos capítulos iniciais do livro: Keti Tenenblat, Introdução à Geometria Diferencial, damos alguns conceitos básicos para a compreensão do conteúdo. Elementos de Cálculo diferencial e Álgebra linear são usados como preliminares para o enunciado do teorema, bem como para a sua compreensão.

4 Resultados

4.1 Conceitos preliminares

Uma função vetorial $f : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ é $C^k(k = 0, 1, 2, ...)$ se f e suas primeiras k derivadas $f', f'', ..., f^{(k)}$,existem e são todas continuas.Dizemos que f é suave se f é C^k para cada inteiro positivo k.

Dizemos que uma curva parametrizada $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ para algum intervalo $I = (a, b)$ ou $[a, b]$ em $\mathbb{R}$ é regular se $\alpha'(t) \neq 0$ para todos $t \in I$.

O conceito fundamental subjacente á geometria diferencial das curvas é o comprimento de arco de uma curva parametrizada.

Definição 1. *Se $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ for uma curva parametrizada, então para qualquer $a \leq t \leq b$, definimos seu comprimento de arco de a a t como sendo $S(t) = \int_a^t ||\alpha'(u)||du$.*

Ou seja, a distância que uma partícula percorre. Seja $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada por partes-C^1. Escrevendo

$$\mathcal{L}(\alpha) = \int_a^b ||\alpha'(t)||dt. \qquad \text{onde} \quad \mathcal{L} \quad \text{é o comprimento}$$

Temos que, se $||\alpha'(t)|| = 1$ para todo $t \in [a, b]$, dizemos que a curva α é parametrizada pelo comprimento de arco.

Observalção 1. *Do ponto de vista teórico, qualquer curva parametrizada regular pode ser reparametrizada pelo comprimento de arco.*

4.2 Curvas no Espaço

Seja α uma curva parametrizada por comprimento de arco, então $\alpha'(s)$ é o vetor tangente unitário à curva, que denotamos por $T(s)$.

Assumindo $T'(s) \neq 0$, definimos o vetor normal por $N(s) = \frac{T'(s)}{||T'(s)||}$ e a curvatura por $K(s) = ||T'(s)||$. Até agora,temos

$$T'(s) = K(s)N(s)$$

Assumindo $K(s) \neq 0$, define-se o vetor binormal por $B(s) = T(s) \times N(s)$. Com isso $\{T(s), N(s), B(s)\}$ formam uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

ISSN 1983-8174

A *torção* é defina por $\tau(s) = N'(s)B(s)$, isso nos dá

$$N'(s) = -K(s)T(s) + \tau(s)B(s)$$

Sabemos que

$$B'(s)B(s) = 0, B'(s)T(s) = -T'(s)B(s) = 0$$

e

$$B'(s)N(s) = -N'(s)B(s) = -\tau(s)$$

Portanto

$$B'(s) = -\tau(s)N(s)$$

Os vetores $T'(s), N'(s), B'(s)$ são as fórmulas de Frenet.

Proposição 1. *Para qualquer curva parametrizada regular α, temos*

$$K = \frac{||\alpha' \times \alpha''||}{||\alpha'||^3}.$$

Proposição 2. *Uma curva do espaço é uma reta, se e somente se sua curvatura for 0 em todos os pontos.*

Proposição 3. *Uma curva do espaço é plana, se e somente se sua torção for 0 em todo ponto.*

As únicas curvas planas com curvatura constante diferente de zero são (porções de) círculos.

Proposição 4. *(Forma canônica local) Seja α uma curva parametrizada por comprimento de arco suave(C^3 ou melhor). Se $\alpha(0) = 0$, então para s próximo de 0, temos*

$$\alpha(s) = (s - \frac{K_0^2}{6}s^3 + \cdots)T(0) + (\frac{K_0^2}{2}s^2 + \frac{K_0'}{6}s^3 + \cdots)N(0) + (\frac{K_0\tau_0}{6}s^3 + \cdots)B(0).$$

Onde $K_0, \tau_0,$ e K_0' denotam respectivamente, os valores de K_0, τ_0, K_0' em 0 e $\lim\limits_{s\to 0} \frac{\cdots}{s} = 0.$

A noção fundamental em geometria é a de congruência: quando duas figuras diferem meramente por um movimento rígido? Se a curva α^* é obtida a partir da curva α realizando um movimento rígido ($\Psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, com $\Psi(X) = AX + B, B \in \mathbb{R}^3$ e A matiz ortogonal 3×3 com $\det(A) > 0$), então as fórmulas de Frenet em pontos correspondentes diferem por esse mesmo movimento rígido, e a torção das armações deve ser a mesma.

A curvatura total de uma curva fechada no espaço, que é a integral de sua curvatura, isto é, se $\alpha : [0, L] \to \mathbb{R}^3$ é uma curva parametrizada pelo comprimento de arco, com $\alpha(0) = \alpha(L), \alpha'(0) = \alpha'(L)$, e $\alpha''(0) = \alpha''(L)$, então sua curvatura

ISSN 1983-8174

total é $\int_0^L k(s)ds$. Podemos interpretar geometricamente essa quantidade da seguinte forma: A aplicação de Gauss de α é aplicação na esfera unitária, Σ, dado pelo vetor tangente $T : [0, L] \to \Sigma$; sua imagem, Γ, é classicamente chamada de **Indicatriz tangente** de α.

Teorema fundamental da teoria das curvas: Duas curvas de espaço C e C^* com curvatura diferente de zero são congruentes se, e somente se as parametriza ções de arco correspondentes $\alpha, \alpha^* : [0, L] \to \mathbb{R}^3$ têm a propriedade de que $K(s) = K^*(s)$ e $\tau(s) = \tau^*(s)$ para todos $s \in [0, L]$.

Proposição 5. *(Fórmula de Crofton) Seja Γ uma curva C^1 por partes na esfera. Então*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Gamma) &= \frac{1}{4}\int_\Sigma \#(\Gamma \cap \xi^\perp)d\xi \qquad \textit{(Aqui } d\xi \textit{ representa o elemento de área em } \Sigma) \\ &= \pi \times \textit{(número médio de interseções de } \Gamma \textit{ c/ todos os grandes círculos).} \end{aligned}$$

Para entender a fórmula acima, devemos considerar $\alpha : [0, L] \to \Sigma$ a parametri zação pelo comprimento de arco de Γ, e definindo $F : [0, L] \times [0, 2\pi] \to \Sigma$ por $F(s, \phi) = \xi$, onde $\xi^\perp$ é o grande círculo de ângulo ϕ entre Γ e $\alpha(s)$. F toma valores em ξ exatamente $\#(\Gamma \cap \xi^\perp)$ vezes, isto é, F é uma parametrização de Γ, e assim temos:

$$\int_\Sigma \#(\Gamma \cap \xi^\perp)d\xi = \int_0^L \int_0^{2\pi} \parallel \frac{\partial F}{\partial s} \times \frac{\partial F}{\partial \phi} \parallel$$

Aplicando isso ao caso da indicatriz tangente de uma curva de espaço fechado, deduzimos o seguinte resultado clássico.

4.3 Teorema de Fenchel.

Teorema 1. *A curvatura total de qualquer curva fechada no espaço é de pelo menos 2π, e a igualdade ocoore se e somente se a curva for uma curva plana fechada simples (convexa).*

Demonstração. Seja Γ a indicatriz tangente de nossa curva de espaço. Se C é uma curva plana fechada simples, então Γ é um grande circulo na esfera. Então a indicatriz tangente atravessa o grande circulo exatamente uma vez e $\int_C K ds = 2\pi$.

Para provar a recíproca, por nossas observações anteriores, Γ deve cruzar $\xi^\perp$ para quase todos $\xi \in \Sigma$ e,portanto,deve cruzá-lo pelo menos duas vezes,e assim segue da Fórmula de Crofton que $\int_C K ds = \mathcal{L}(\Gamma) \geq \frac{1}{4}(2)(4\pi) = 2\pi$. Agora, afirmamos que se Γ é uma curva fechada e conectada em Σ de comprimento $\geq 2\pi$, então Γ está em um hemisfério fechado. Segue-se, então, que Γ é uma indicatriz tangente de comprimento 2π. Segue-se que a curva é plana e a indicatriz tangente atravessa o grande circulo precisamente uma vez,o que significa que $K > 0$ e a curva é convexa.

ISSN 1983-8174

Para provar a afirmação, procedemos da seguinte forma: Suponha $\mathcal{L}(\Gamma) \leq 2\pi$. Escolha P e Q em Γ para que os arcos $\Gamma_1 = \widehat{PQ}$ e $\Gamma_2 = \widehat{QP}$ tenham o mesmo comprimento. Escolha N que divide o arco do grande círculo mais curto de P para Q. Por conveniência, giramos a imagem de modo que N seja o polo norte da esfera. Suponha agora que a curva Γ_1, deveria, entrar no hemisfério sul, deixe $\overline{\Gamma_1}$ denotar a reflexão de Γ_1 através do polo norte. Agora, $\Gamma_1 \cup \overline{\Gamma_1}$ é uma curva fechada contendo um par de pontos antípodas e mais longa do que o grande circulo. Como $\Gamma_1 \cup \overline{\Gamma_1}$ tem o mesmo comprimento que Γ, vemos que o $\mathcal{L}(\Gamma) > 2\pi$, o que é uma contradição. Portanto Γ de fato está no hemisfério norte. $\square$

5 Conclusão

O teorema de Fenchel é um clássico teorema na teoria global de curvas, que relaciona conceitos fundamentais em Geometria. Aqui, foi feito uma abordagem muito sucinta, apenas citando os elementos principais para uso na prova do teorema. Podemos ainda classificá-lo como uma das principais aplicações da fórmula de Crofton.

6 Referências

Lima, F.R. **Introdução à Geometria Diferencial**. 1ª edição. SBM, Macapá, 2016.

Shifrin, Theodore. **Diferential Geometry: A First Course in Curves and Surfaces**. 1ª edição. University of George, 2016.

Schlichtkrull, Henrik. **Curves and Surfaces:Lecture Notes for Geometry 1**. University of Copenhagen, 2011.

Tenenblat, Keti. **Introdução à Geometria Diferencial**. 2ª edição. São Paulo.Editora Edgard Blucher, 2011.