V SEMANA UNIVERSITÁRIA DA URCA
XXIII Semana de Iniciação Científica
07 a 11 de Dezembro de 2020
Tema: "Os impactos e desafios da pandemia pela COVID-19 no ensino, pesquisa e extensão"
ISSN 1983-8174

UTILIZANDO MATRIZES CIRCULANTES NA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES POLINOMIAIS: UM MÉTODO PRÁTICO PARA GRAU 2 e 3

José Ernandes Moreira Carneiro da Silva[1],**Reginaldo José da Silva**[2], **Jocel Faustino Norberto de Oliveira**[3]

Resumo
Neste estudo será apresentado uma ferramenta não muito conhecida, mas bastante eficiente na resolução de equações polinomiais. Interligando algumas propriedades de matrizes circulantes e um pouco de álgebra linear, será apresentado um método para encontrar raízes de polinômios de grau 2 e 3, com abordagem de exemplos claros e cálculos simples.

Palavras-chave: Matrizes circulantes. Polinômios. Autovalores.

1 Introdução

Neste trabalho, apresentamos uma ferramenta muito interessante, embora não muito conhecida na resolução de equações polinomiais, em particular para polinômios de grau 2 e 3, usando o conceito de matrizes *circulantes*. O processo consiste em tomar um polinômio p de grau n, considerando a existência de uma matriz circulante C de forma que $C = q(M)$, onde M é uma matriz circulante associada a $v = (0, 1, \cdots, 0)$, com q um polinômio de grau $n-1$ e $Cv = q(M)v = q(\lambda)v$, isto é, os autovalores de C são da forma $q(w)$, onde w é raiz complexa da unidade, logo as raízes de p são da forma $q(w)$.

2 Objetivos

O objetivo principal é apresentar as matrizes circulantes para encontrar raízes de polinômios de grau 2 e 3, com exemplos claros e cálculos simples. Somando-se a isto mostrar a beleza matemática, desde a construção do método e a prática. Tem também como propósito valorizar o estudo de outros matemáticos que não foram tão reconhecidos.

3 Metodologia

Existe uma variedades de métodos para se encontrar raízes de polinômios onde cada um tem suas vantagens e limitações no seu processo, aqui será abor-

[1]Licenciatura em Matemática/URCA.E-mail:jose.ernandes@urca.br
[2]Licenciatura em Matemática/URCA.E-mail:joseagnaldo1990@gmail.com
[3]DEMPA/URCA.E-mail:jocel.faustino@urca.br

ISSN 1983-8174

dado uma ferramenta que envolve matrizes circulantes e um pouco de álgebra linear. Mais precisamente, precisamos usar a noção de autovalores e autovetores, bem como de polinômio característico associado a matriz desses autovalores.

Para uma melhor compreensão, antes de apresentar o método das matrizes para resolução de polinômios é necessário conhecer alguns conceitos e definições importantes que servirão de suporte para conseguir alcançar os objetivos.

4 Definições preliminares e método

4.1 Matrizes circulantes e álgebra linear

Os seguintes enunciados tem por base Filho (2015) e Calvalcanti (2016).

Definição 1. *Dizemos que matriz uma C é circulante de ordem n, quando suas linhas são formadas pelas entradas de um vetor v de n componentes que permuta ciclicamente. Tal vetor determina a matriz circulante.*

Em outras palavras acontece o seguinte, o primeiro elemento da primeira linha da matriz passa a ser o segundo elemento da segunda linha, da mesma forma o segundo elemento passa a ser o terceiro da segunda linha e de forma análoga acontece com os demais termos da primeira linha ressaltando que o ultimo elemento passa a ser o primeiro da segunda linha, o processo se repete para as demais linhas.
Exemplo 1 O vetor $v = (a, b, c)$ gera a seguinte matriz circulante de ordem 3.

$$C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

.
Exemplo 2 O vetor $v = (0, 1, 0, \cdots, 0)$ de ordem n gera uma matriz circulante M, fundamental para achar as matrizes que nos darão suporte para achar raízes de polinômios. Por exemplo, a matriz circulante M associada ao vetor $v = (0, 1, 0)$ será.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Toda vez que for mencionado a matriz M no texto, estamos se referindo a matriz formada pelo vetor $v = (0, 1, \cdots, 0)$. Uma propriedade importante das matrizes Circulantes M de ordem n, é a seguinte: Dado $k \in \mathbb{N}$, se realizarmos a operação M^K, as linhas de M permutarão ciclicamente. Nesse processo as linhas de M são trocadas de baixo para cima, o exemplo a seguir ilustra bem a propriedade.
Exemplo 3 Seja M de ordem 3, e $k = 2$ então.

ISSN 1983-8174

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Caso testássemos M para uma infinidades de $k \in \mathbb{N}$, obteríamos $M^4 = M$, $M^5 = M^2$, $M^6 = M^3$, $M^7 = M^4 = M$ e assim por diante.Além destes conceitos prévios da funcionalidade das matrizes circulantes será usado mais alguns resultados para construção do método.

Teorema 1. *Toda matriz circulante C de ordem n+1 determinada por um vetor $v = (a_0, a_1, a_2, ..., a_n)$, está associada a um polinômio $q(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ de grau n tal que $C = Q(M) = a_0I + a_1M + a_2M^2 + \cdots + a_nM^n$, onde M é a matriz circulante de ordem n+1 determinada pelo vetor $v = (0, 1, 0, ..., 0)$ e I é a matriz identidade.*

Lema 1. *Dada uma matriz circulante M de ordem n, determinada pelo vetor $v = (0, 1, 0, ..., 0)$ esta possui polinômio característico da forma $p_c(\lambda) = \lambda^n - 1$ e, consequentemente os autovalores da matriz M são raízes complexas da unidade.*

Lema 2. *Dada uma matriz quadrada A com um autovalor λ e $n \in \mathbb{N}$. vale a seguinte afirmação $Av = \lambda v \implies A^nv = \lambda^nv$.*

Lema 3. *Seja A uma matriz quadrada e v um autovetor associado ao autovalor λ dessa matriz, e se q é um polinômio qualquer tem-se $Av = \lambda v \implies q(A)v = q(\lambda)v$.*

Teorema 2. *Os autovalores da matriz $q(M)$ são da forma $q(w)$, onde w é uma raiz complexa da identidade.*

4.2 Método

Os resultados relatados anteriormente nos fornece ferramentas fundamentais para a construção do seguinte algoritmo:
1ºPasso: Escolha do polinômio p de grau n o qual deseja-se encontrar as raízes.
2ºPasso: Considere uma matriz circulante C gerada por $v = (a_o, a_1, a_2, \cdots, a_{n-1})$, que representa o polinômio igual a p, isto é $p_c(x) = p(x)$ e as raízes de p serão autovalores da matriz C.
3ºPasso: É fato que podemos associar a matriz C um polinômio q tal que $C = q(M)$, este resultando é garantido pelo teorema 1.
4ºPasso: É possível ver que $Cv = q(M)v = q(\lambda)v$, vide lema 2.
5ºPasso: A equação $Cv = q(M)v = q(\lambda)v$ nos diz que os autovalores da matriz C são da forma $q(w)$, onde w é uma raiz complexa da identidade, vide teorema 2
6ºPasso: As raízes do polinômio p são os valores de $q(w)$.

A seguir será mostrado na prática o processo para encontrar raízes de polinômios, especificamente para polinômios de grau 2 e 3.

ISSN 1983-8174

4.3 Raízes de polinômios de grau 2

Exemplo 4: Seja $p(x) = 1 + x + x^2 \implies$ existe uma matriz circulante $C = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ de ordem 2 tal que $p_c(x) = det(IX - C) = det \begin{vmatrix} x-a & -b \\ -b & x-a \end{vmatrix} = x^2 - 2ax + a^2 - b^2$, como $p_c(x) = p(x)$ tem-se que:
$-2a = 1 \implies a = -\dfrac{1}{2}$
$a^2 - b^2 = 1 \implies b^2 = a^2 - 1 = \dfrac{1}{4} - 1 = \dfrac{-3}{4} \implies b = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2i}$. Por conveniência, vamos escolher $b = \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, desta forma temos

$$C = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2}i \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}i & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Associando a primeira linha de C o polinômio $q(x) = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}ix$, como a matriz C é de ordem 2, logo $p_C(\lambda) = \lambda^2 - 1$ onde $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$ são raízes da unidade. Agora basta apenas calcular $q(\lambda)$
$q(1) = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i = \dfrac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$
$q(-1) = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i = \dfrac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$
E de fato $q(1)$ e $q(-1)$ são raízes de $p(x) = 1 + x + x^2$.

4.4 Raízes de polinômios de grau 3

Exemplo 6 Seja $p(x) = 1 + x + x^2 + x^3$ temos que a matriz circulante associada é $C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \implies p_c(x) = det(xI - C) = det \begin{vmatrix} x-a & -b & -c \\ -c & x-a & -b \\ -b & -c & x-a \end{vmatrix} = x^3 - 3a^2 + (3a^2 - 3bc)x + 3cab - a^3 - b^3 - c^3$, pela igualdade $p_c(x) = p(x)$ obtemos as seguintes igualdades $\begin{cases} -3a = 2 \\ 3a^2 - 3bc = 1 \\ 3ab\ -^3\ -b^3 - c^3 = 1 \end{cases}$

Assim temos: $-3a = 2 \implies a = -\dfrac{2}{3}$, pela segunda equação $bc = \dfrac{3a^2 - 1}{3} = \dfrac{1}{9}$, a terceira nos diz que $c^3 + b^3 = -1 - a^3 + 3abc = -\frac{25}{27}$. Como sabemos que $b^3c^3 = (\dfrac{1}{9})^3 = \dfrac{1}{729}$ e $b^3 + c^3 = -\dfrac{25}{27}$ podemos relacionar um polinômio de grau 2 da forma $y^2 - Sy + P$, onde S é a soma e P o produto das raízes, assim temos a equação $y^2 + \dfrac{25}{27}y + \frac{1}{729} = 0$, cuja solução

ISSN 1983-8174

é $y = \dfrac{-25 \pm \sqrt{621}}{54}$. A partir disto pode-se afirmar que $b^3 = \dfrac{-25 + \sqrt{621}}{54} \implies b = \sqrt[3]{\dfrac{-25 + \sqrt{621}}{54}}$ e da mesma forma $c^3 = \dfrac{-25 - \sqrt{621}}{54} \implies c = \sqrt[3]{\dfrac{-25 - \sqrt{621}}{54}}$,
E consequentemente o polinômio $q(x) = -\dfrac{2}{3} + \sqrt[3]{\dfrac{-25 + \sqrt{621}}{54}}x + \sqrt[3]{\dfrac{-25 - \sqrt{621}}{54}}x^2$.

Alem disso, $P_c(\lambda) = \lambda^3 - 1 \implies \lambda = 1,\ \lambda = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = w$ ou $\lambda = \overline{w}$ pois C é de ordem 3. As raízes de $p(x)$ serão

$$q(1) = -\frac{2}{3} + \sqrt[3]{\frac{-25 + \sqrt{621}}{54}} + \sqrt[3]{\frac{-25 - \sqrt{621}}{54}}$$
$$q(w) = -\frac{2}{3} + \left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)\left(\sqrt[3]{\frac{-25 + \sqrt{621}}{54}} + \left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)\left(\sqrt[3]{\frac{-25 - \sqrt{621}}{54}}\right)\right)$$
$$q(\overline{w}) = -\frac{2}{3} + \left(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right)\left(\sqrt[3]{\frac{-25 + \sqrt{621}}{54}} + \left(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right)\left(\sqrt[3]{\frac{-25 - \sqrt{621}}{54}}\right)\right).$$

5 Conclusão

A presente pesquisa possibilita que se chegue aos seguintes resultados: Quanto maior o grau do polinômio $p(x)$, fica mais difícil de se encontrar suas raízes. Por exemplo, se $p(x)$ for de grau 4 não é impossível calcular suas raízes através deste método, mas fica difícil o processo do calculo. Além disso é possível sem muito esforço encontrar uma formula geral para $q(x)$ nos polinômios de grau 2 e 3. Ainda neste sentido o método possibilita trabalhar a matemática de uma forma inovadora tanto numa perspectiva científica como foi apresentada, quanto educacional já que no ensino básico a uma grande dificuldade em se trabalhar com polinômios de grau 3 e o método facilita o processo.

6 Referências

CAVACANTE, Aliomar Santos.**Matrizes circulantes**:Aplicação na resolução de equações polinomiais.UFRP, Recife, 2016. Disponível em: http://www.dm.ufrpe.br/sites/www.dm.ufrpe.br/files/tcc_ -_ aliomar _ santos _ cavalcanti.pdf.Acesso em: 14 de nov 2020.

FILHO, Daniel Cordeiro de Morais.**Dez ou onze temas interessantes de matemática elementar**.Campina Grande, PB:EDUFCG Ed.2015.