V SEMANA UNIVERSITÁRIA DA URCA
XXIII Semana de Iniciação Científica
07 a 11 de Dezembro de 2020
Tema: "Os impactos e desafios da pandemia pela COVID-19 no ensino, pesquisa e extensão"
ISSN 1983-8174

APLICAÇÃO DA ÁLGEBRA LINEAR NAS SOLUÇÕES DE SISTEMAS DE EDO's LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM

Carlos Felipe Ribeiro Sena[1]; **Aureliana Belém Tavares**[2]; **José Tiago Nogueira Cruz** [3]

Resumo

Aplicações de álgebra linear são rotineiramente usadas em diversos problemas. Uma delas é na resolução de sistemas de EDO's que frequentemente são vistos em problemas de áreas como engenharia, física, química, entre outras. Fazendo o uso da noção de autovalores, autovetores e diagonalização é possível resolver sistemas lineares que são associados a matrizes diagonalizáveis. Um sistema de EDO's lineares de primeira ordem se torna trivial quando ao passarmos para a forma matricial aparece uma matriz diagonal, neste caso, o sistema é dito desacoplado onde cada derivada depende apenas da função particular, sendo fácil sua resolução apenas com uso do cálculo. Através de algoritmos encontramos autofunções que são a chave para se resolver sistemas de equações diferenciais.

Palavras-chave: Sistemas de EDO's. Autovalores. Autovetores. Diagonalização.

1 Introdução

Em muitos problemas aplicados nas diversas áreas, aparecem frequentemente sistemas de equações diferencias. Um método eficaz na solução desses sistemas é dado quando a matriz associada é diagonalizável, neste caso, podemos utilizar os conceitos da álgebra linear para obter as soluções desejadas, expressando a solução geral desses sistemas em termos dos autovalores e autovetores dessa matriz, este processo é bem simples comparado a outros métodos utilizados para resolver estes sistemas. Neste trabalho, veremos com detalhes como conseguimos obter autofunções que solucionam esses sistemas em que a matriz associada é diagonalizável, tendo em vista que quando trabalhamos com uma matriz diagonal o sistema se apresenta desacoplado, isto é, cada derivada vai depender apenas da função particular, sendo possível resolver esses sistemas apenas com o uso do cálculo.

[1]Licenciatura em Matemática/URCA-PIBIC/URCA.E-mail: feliperibeirosena@gmail.com
[2]Licenciatura em Matemática/URCA-PIBIC/URCA.E-mail: aureliana.belem@gmail.com
[3]DEMPA/URCA.E-mail: Jtncruz@hotmail.com

ISSN 1983-8174

2 Objetivos

Mostrar de maneira direta e objetiva uma aplicação da álgebra linear para facilitar a resolução de sistemas de EDO's lineares. Exibir um método eficiente para conseguirmos as soluções destes sistemas quando os mesmos se apresentam associados a matrizes diagonalizáveis.

3 Metodologia

Iremos analisar como podemos utilizar a álgebra linear para encontrar as soluções de sistemas de equações diferenciais. Primeiramente veremos o que são autovalores e autovetores e como eles se associam a uma matriz diagonalizável. Em seguida será apresentado como podemos utilizar-los no processo de resolução destes sistemas.

3.1 Noções iniciais

Seja $T : V \to V$ uma transformação linear. Nesta subseção estamos interessados em saber quais vetores são levados em um múltiplo de si mesmo, isto significa dizer que estamos procurando um vetor $v \in V$ e um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que $Tv = \lambda \cdot v$, neste caso, Tv será um vetor de mesma direção que v. Note que $v = 0$ satisfaz a equação $Tv = \lambda \cdot v$, para todo λ. Iremos nos preocupar em determinar vetores $v \neq 0$ tais que $Tv = \lambda \cdot v$, o número real λ será chamado autovalor ou valor característico de T, e o vetor v será denominado autovetor ou vetor característico de T. Formalizemos este conceito.

Definição 1. *Seja $T : V \to V$ um operador linear. Se existem $v \in V,\ v \neq 0$, e $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que $Tv = \lambda \cdot v$, dizemos que v é um autovetor associado a λ, e o número λ é denominado um autovalor de T associado ao autovetor v.*

Dizemos que T é diagonalizável se existir uma base de V formada por autovetores de T. Faremos uso disto mais adiante.

3.2 Resolução com uso da álgebra

Em muitos problemas aplicados em física, química e principalmente em engenharia várias grandezas variam continuamente com o tempo e acabam se relacionando através de equações diferenciais formando sistemas como o descrito abaixo:

$$\begin{cases} x_1'(t) &= a_{11}x_1(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) \\ x_2'(t) &= a_{21}x_1(t) + \cdots + a_{2n}x_n(t) \\ \quad\vdots & \\ x_n'(t) &= a_{n1}x_1(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) \end{cases} \tag{1}$$

ISSN 1983-8174

onde $x_1(t), \cdots, x_n(t)$ são funções diferenciáveis, $x_1'(t), \cdots, x_n'(t)$ são suas derivadas e os coeficientes a_{ij} são constantes. Escrevendo (1) como

$$X'(t) = AX(t) \tag{2}$$

onde

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad X'(t) = \begin{bmatrix} x'(t) \\ \vdots \\ x'n(t) \end{bmatrix} \quad e \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

vemos sem dificuldade a linearidade de (2). De fato, se $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são soluções de $X'(t) = AX(t)$, então $\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$ também será uma solução, pois

$$\begin{aligned} (\alpha x_1(t) + \beta x_2(t))' &= \alpha x_1'(t) + \beta x_2'(t) \\ &= \alpha A.x_1(t) + \beta A x_2(t) \\ &= A(\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)). \end{aligned}$$

Além disso, percebemos que a função identicamente nula é uma solução (trivial) de (2).

Pelo que foi mencionado acima, o conjunto de todas as soluções de (2) é um subespaço do conjunto de soluções de todas as funções contínuas com valores no $\mathbb{R}^n$. Em particular sempre existe um conjunto fundamental de soluções para (2). Se A é uma matriz de ordem $n \times n$, então existem n funções linearmente independentes num conjunto fundamental, e cada uma das soluções de (2) poderá ser como combinação linear dessas n funções de maneira única. Isto é, um conjunto fundamental de soluções é uma base para o conjunto de todas as soluções de (2).Ou seja, dado um vetor X_0 o problema de valor inicial será a busca pela única função $X(t)$ tal que

$$X'(t) = AX(t) \qquad \text{e} \qquad X(0) = X_0.$$

Além disso, se A é matriz diagonal, as soluções de (2) podem ser obtidas através de cálculo básico. Por exemplo, se considerarmos

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \tag{3}$$

ou seja,

$$\begin{cases} x_1'(t) &= & 3x_1(t) \\ x_2'(t) &= & -5x_2(t) \end{cases} \tag{4}$$

Um sistema como em (3) é chamado desacoplado, pois cada derivada depende apenas da função particular, e não de uma combinação ou "acoplamento"de $x_1(t)$ e $x_2(t)$, caso não seja uma matriz diagonal é interessante trabalharmos com uma diagonalizável. Sabemos pelo cálculo que as soluções de (4) são

ISSN 1983-8174

$x_1(t) = c_1e^{3t}$ e $x_2(t) = c_2e^{-5t}$, para todas contantes c_1 e c_2. É importante observar que cada solução de (3) podem ser escrita na forma.

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1e^{3t} \\ c_2e^{-5t} \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-5t}$$

Isso nos sugere que para a equação geral $X'(t) = AX(t)$ qualquer solução pode ser uma combinação linear da forma:

$$X(t) = Ve^{\lambda t} \tag{5}$$

Onde λ é um escalar e V um vetor não-nulo, pois se $V = 0$, $X(t)$ será a função identicamente nula, satisfazendo $X'(t) = AX(t)$. Se multiplicarmos os dois lados de (5) por A temos que

$$AX(t) = AVe^{\lambda t}$$

por V ser um vetor constante obtemos que

$$X'(t) = \lambda Ve^{\lambda t}$$

Tendo em vista que $e^{\lambda t}$ nunca se anula então $X'(t)$ será igual a $AX(t)$ se e só se $\lambda V = AV$, isto é, λ é autovalor de A e V é o autovetor associado. Logo os pares de autovalor/autovetor fornecem uma solução do tipo

$$X(t) = Ve^{\lambda t}$$

para $X'(t) = AX(t)$. Muitas vezes essas soluções são chamadas de autofunções da equação diferencial e são a chave para se resolver sistemas de equações diferenciais, como veremos adiante.

4 Resultados

Veremos agora como solucionar um sistema de EDO's cuja matriz associada é diagonalizável, neste caso podemos fazer uso dos conceitos vistos anteriormente, utilizando as autofunções encontradas para obtermos as soluções.

Exemplo: Seja S o sistema de equações diferenciais lineares de primeira ordem descrito abaixo:

$$S : \begin{cases} x_1'(t) &= 2x_1(t) + 2x_2(t) \\ x_2'(t) &= 2x_1(t) + 3x_2(t) \end{cases}$$

Iremos utilizar as autofunções vistas anteriormente para calcular suas soluções. Primeiramente precisamos colocar S na forma de uma equação matricial, fazendo isso temos:

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

ISSN 1983-8174

A matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ é diagonalizável e tem como autovalores $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 4$, seus autovetores associados serão:

$$v_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

as soluções $s_1(t) = v_1 e^{\lambda_1 t}$ e $s_2(t) = v_2 e^{\lambda_2 t}$ satisfazem a equação geral $X'(t) = AX(t)$, assim como qualquer combinação linear entre s_1 e s_2, como já vimos neste trabalho. Tendo isto em vista, podemos fazer a combinação linear que esta descrito abaixo:

$$X(t) = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t}$$

Essa é dita a solução geral do sistema, e podemos obter a solução geral do exemplo em questão substituindo os valores de λ_1, λ_2 e v_1, v_2, sendo assim, obtemos a seguinte solução geral

$$X(t) = c_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{4t} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) & = -2c_1 e^{t} + c_2 e^{4t} \\ x_2(t) & = c_1 e^{t} + c_2 e^{4t} \end{cases}$$

Desta forma obtemos as soluções desejadas fazendo uso do conteúdo visto anteriormente, este método muitas vezes é essencial na resolução de um sistema de equações diferenciais, sendo bem eficiente quando notamos que o sistema que desejamos resolver é associado a uma matriz diagonalizável.

5 Conclusão

Em vista dos argumentos apresentados, os conceitos de operadores diagonalizáveis da álgebra Linear permite simplificar a resolução de sistema de EDO's lineares. Sendo possível através dos conceitos vistos, encontrarmos as soluções destes sistemas mais facilmente quando estes são associados a uma matriz diagonalizável.

Referências

[1] ANTON, Howard; RORRES Chris. **Algebra Linear com Aplicações**.8ª edição. Porto Alegre: Bookman, 2001.

[2] Lang, S. **Álgebra Linear**. Ed. Edgard Blücher, Rio de Janeiro, 1971.

[3] LAY, David C. **Álgebra Linear e suas Aplicações**. 2ª edição. Rio de Janeiro: Livros técnicos e Científicos-LTC,1999.

[4] Lima, E. L. **Álgebra Linear**, Coleção Matemática Universitária, IMPA, Rio de Janeiro,1995.

[5] Steven J. Leon. **Álgebra Linear com aplicações**. 4ª edição. Rio de Janeiro: Livros técnicos e Científicos-LTC,1999.