V SEMANA UNIVERSITÁRIA DA URCA
XXIII Semana de Iniciação Científica
07 a 11 de Dezembro de 2020
Tema: "Os impactos e desafios da pandemia pela COVID-19 no ensino, pesquisa e extensão"
ISSN 1983-8174

Teorema de Fary-Milnor

Samuel Albuquerque Ramalho[1], **Jocel Faustino Norberto de Oliveira**[2]

Resumo

Por meio desse trabalho vamos expor o teorema de Fary-Milnor, que é um dos principais teoremas da Teoria dos nós, esse trabalho expõe de maneira direta esse teorema que traz as condições necessárias para uma curva ter nó. Definimos, da Geometria Diferencial, diversos conceitos de suma importância para esse teorema, e logo após falaremos sobre nós e sua relação com curvas diferenciáveis, e por fim traremos o teorema de Fary-Milnor e sua demonstração, que é essencialmente a prova esboçada por Fenchel em 1951.

Palavras-chave: Teoria de nós. Fórmula de Crofton. Teorema de Fary-Milnor.

1 Introdução

A Teoria de nós surge numa tentativa de explicar fenômenos físicos e se desenvolveu no âmbito da matemática pura, com os vários avanços conquistados nesse área foram possíveis desenvolver diversas aplicações. Apesar do esforço de muitos matemáticos modernos a Teoria de nós ainda possui diversas questões em aberto, tornando-se assim um ramo da matemática em constante evolução.

Nesse trabalho, estudaremos um pouco sobre a Teoria de nós, destacando o importante teorema de Fary-Milnor. Sem a pretensão de fazer uma apresentação aprofundada, iremos apenas destacar os pontos principais para o entendimento do teorema.

2 Objetivos

Apresentar de maneira direta o teorema de Fary-Milnor, que é resultado de trabalhos da teoria de nós e também da Geometria Diferencial. Apresentar os conhecimentos necessários para compreendê-lo e logo após mostra-lo juntamente com a sua demonstração.

3 Metodologia

Partindo de estudos desenvolvidos na área da Geometria Diferencial e também sobre à teoria de nós, através do livro "Introdução à Geometria Diferencial"de Keti Tenenblat, enunciamos os conceitos fundamentais na teoria de curvas dife-

[1]Licenciatura em Matemática/URCA-PIBIC/URCA.E-mail:samuel.albuquerque2604@urca.br
[2]DEMPA/URCA.E-mail:jocel.faustino@urca.br

ISSN 1983-8174

renciáveis, visando adquirir os conhecimentos necessários para compreensão do teorema de Fary-Milnor. Destacamos (apenas enunciando) os elementos-base que são usados na fórmula de Crofton, que é ferramenta fundamental na teoria global de curvas no espaço.

4 Definições preliminares

4.1 Curva Parametrizada Diferenciável no Espaço

Definição 1. *Uma Curvas Parametrizada Diferenciável no Espaço é uma aplicação $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)), t \in I$, onde x(t),y(t), e z(t) são funções diferenciáveis de classe C^∞.*

Definição 2. *Uma curva parametrizada diferenciável $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ é dita plana, se existe um plano de $\mathbb{R}^3$ que contém $\alpha(I)$.*

Proposição 1. *Uma curva regular $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ esta parametrizada pelo comprimento de arco, se e somente se, $\forall t \in I$*

$$|\alpha'(t)| = 1.$$

Como ocorre com as curvas planas, toda curva regular no espaço admite uma reparametrização pelo comprimento de arco.

Definição 3. *Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco. A velocidade com que as retas tangentes mudam de direção é denominado de Curvatura de α, ou seja a curvatura de α em $s \in I$ é o número real.*

$$k(s) = |\alpha''(s)|$$

Definição 4. *O hemisfério de S^2 com polo N é o conjunto $\{x \in S^2 \,|\widehat{N}x < \frac{\pi}{2}\}$, onde $\widehat{N}x$ denota a distância de N a x ao longo de um grande círculo através de N e x. Se S^2 é visto como o conjunto de vetores unitários, o hemisfério aberto com polo N é*

$$\{x \in S^2 \mid \langle N, x\rangle > 0\}$$

A **curvatura total** de uma curva fechada no espaço, que é a integral de sua curvatura, isto é, se $\alpha : [0, L] \to \mathbb{R}^3$ é uma curva parametrizada pelo comprimento de arco, com $\alpha(0) = \alpha(L), \alpha'(0) = \alpha'(L)$, e $\alpha''(0) = \alpha''(L)$, então sua curvatura total é $\int_0^L k(s)ds$. Podemos interpretar geometricamente essa quantidade da seguinte forma: A aplicação de Gauss de α é aplicação na esfera unitária, S^2, dado pelo vetor tangente $T : [0, L] \to S^2$; sua imagem, Γ, é classicamente chamada de **Indicatriz tangente** de α.

ISSN 1983-8174

Lema 1. *Se $C = \alpha([0,l])$ é uma curva fechada, então a imagem da indicatriz tangente não fica num hemisfério.*

Teorema 1. *(Fórmula de Crofton). Seja C a imagem de uma curva regular $\gamma(t)$ em S_2 de comprimento l. A medida do conjunto dos grandes círculos orientados que interceptam l é $4l$.*

De maneira mais geral, podemos pensar esse teorema da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(C) &= \frac{1}{4}\int_{S^2} \#(C \cap \xi^{\perp})d\xi \qquad (d\xi \text{ representa o elemento de área em } S^2)\\ &= \pi \times (\text{número médio de interseções de } C \text{ c/ todos os grandes círculos}).\end{aligned}$$

Onde $\mathcal{L}$ representa o comprimento de C. Para entender a fórmula acima, devemos considerar $\alpha : [0, L] \to S^2$ a parametrização pelo comprimento de arco de S^2, e definindo $F : [0, L] \times [0, 2\pi] \to S^2$ por $F(s, \phi) = \xi$, onde $\xi^{\perp}$ é o grande círculo de ângulo ϕ entre C e $\alpha(s)$. F toma valores em ξ exatamente $\#(C \cap \xi^{\perp})$ vezes, isto é, F é uma parametrização de C, e assim temos:

$$\int_{S^2} \#(C \cap \xi^{\perp})d\xi = \int_0^L \int_0^{2\pi} \parallel \frac{\partial F}{\partial s} \times \frac{\partial F}{\partial \phi} \parallel$$

4.2 Curvas fechadas no espaço - nós

Dada uma curva regular fechada no espaço $\mathbb{R}^3$ a uma imersão $\mu : S^1 \to \mathbb{R}^3$ de classe C^3, ou equivalente, a uma função $\mu : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ que pode ser estendida a uma função periódica $\bar{\mu} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ de classe C^3 com $\bar{\mu}(t) \neq 0 \ \forall \ t \ e \ \mu(a) = \mu(b), \cdots, \ \bar{\mu}(a) = \ \bar{\mu}(b)$.

Uma curva regular fechada no espaço será chamada simples se não houver pontos de auto intersecção (isto é, μ é um mergulho de S^1 em $\mathbb{R}^3$).

Curvas simples fechadas no espaço podem ser estudadas agrupando-as por classes tais que duas curvas da mesma classe possam ser obtidas uma da outra por uma deformação contínua através de curvas simples. A análise destas classes é muito complexa e contém muitos problemas em aberto, constituindo-se numa subárea da Topologia / Geometria chamada Teoria dos Nós.

A formalização da definição destas classes é feita a partir do conceito de *isotopia*. Uma deformação de curvas fechadas $H : S^1 \times [O, 1] \to \mathbb{R}^3$ de classe C^1 tal que para cada t fixo $\mu_t(x) = H(x, t)$ é uma curva regular fechada, é chamada uma homotopia regular. Se, para cada t, μ_t é um mergulho de S_1 em $\mathbb{R}^3$ (ou seja, uma curva regular simples fechada) dizemos que H é uma isotopia.

Dizemos que uma curva regular fechada simples em $\mathbb{R}^3$ é uma curva sem nó quando ela pertence à mesma classe de isotopia do círculo S^1. Caso contrário ela é uma *curva com* ***nó*** (ou simplesmente um nó).

ISSN 1983-8174

5 Resultados

A curvatura total de uma curva fechada no espaço é uma ferramenta importante que fornece uma condição necessária para que uma curva tenho nó.

Isto é o que nos diz o Teorema de Fary-Milnor, cuja prova depende da fórmula chamada "$Formula\ de\ Crofton$ "sobre a medida dos grandes círculos que interceptam um arco na esfera unitária.

Todo grande círculo na esfera unitária S^2 determina unicamente um polo, o ponto extremo do vetor normal unitário ao plano do círculo tal que o polo permanece do lado esquerdo quando percorremos ao longo do círculo.

Desta forma, o conjunto dos grandes círculos orientados está em correspondência um a um com os pontos de S^2.

A medida de um conjunto de grandes círculos orientados em S^2 é a área do correspondente subconjunto de S^2 .

Teorema 2. *(Fary-Milnor): Se α é uma curva simples com nó, então a curvatura total de α é pelo menos 4π.*

Demonstração. Suponhamos $\int kds < 4\pi$. Seja γ a imagem da tangente esférica de α. Então, como γ não fica em nenhum hemisfério, γ é interceptada por todo grande círculo. Usando $n_\gamma(\xi) = \#(\gamma \cap \xi^\perp)$, e de acordo com a fórmula de Crofton

$$4l = \int\int_{s^2} n_\gamma(\xi)dA \ (\ l \ = \ comprimento\ de\ \gamma)$$

$$\frac{1}{4}\int\int_{s^2} n_\gamma(\xi)dA \ = \ l \ = \ \int kds < 4\pi$$

Então, para algum $Y \in S^2, n_\gamma(Y) < 4,$ pois caso contrário

$$\frac{1}{4}\int\int_{s^2} n_\gamma(\xi)dA \ \geq \ \frac{1}{4}\cdot 4\cdot 4\pi \ = \ 4\pi$$

Sejam y o vetor unitário representando Y e $f(s) = \langle y, \alpha(s)\rangle$. Temos então, $f'(s) = \langle y, \gamma(s)\rangle$ e $f'(s) = 0$ se, e somente se $Y^\perp$ intercepta o círculo em $\gamma(s)$. Desta forma, $f(s)$ tem exatamente $n_\gamma(Y) < 4$ pontos críticos. Existe um máximo absoluto e um mínimo absoluto, e possivelmente um ponto de inflexão (se $n(Y) = 3$). Não existe outro extremo relativo além do extremo absoluto.

Assumimos então que as coordenadas de $\mathbb{R}^3$ são escolhidas de forma que $y = (0, 0, 1)$. Então, se $\alpha(s) = (x_1(s), x_2(s), x_3(s))$, com $\langle y, \alpha(s)\rangle = x_3(s)$. Logo, a função coordenada $x_3(s)$ de α tem somente um máximo M e um mínimo m. Estes dois pontos dividem a curva em dois arcos, tal que $x_3(s)$ cresce num e decresce noutro.

Como todo plano horizontal intercepta cada arco em pelo menos um ponto. Todo plano horizontal entre dois planos horizontais $x_3 \ = \ M\ e\ x_3 \ = \ m$ intercepta C em exatamente 2 pontos. Juntamos cada par desses pontos por um segmento de reta, e com todos esses segmentos de reta formamos uma superfície limitada

ISSN 1983-8174

pela curva α, que é homeomorfa a um disco circular. Logo, α é uma curva sem nó. Contradição. Assim, devemos ter $\int k ds \geq 4\pi$. $\square$

A prova feita acima é essencialmente a prova esboçada por Fenchel em 1951. Milnor, em 1950, provou o teorema usando a definição mais geral de curvatura total que comentamos anteriormente, além disso, Milnor provou que qualquer nó tem curvatura total estritamente maior que 4π.

6 Conclusão

A Teoria dos nós apesar da sua clara beleza passa como desconhecida pela maioria dos alunos de graduação em Matemática, por não fazer parte da ementa de tais cursos. Nesse resumo expomos de maneira superficial alguns elementos básicos relacionados aos resultados da teoria local das curvas diferenciáveis. Destacamos a importância da fórmula de Crofton nos resultados globais, em especial, na prova do teorema de Fary-Milnor.

7 Referências

Candida Pansonato, Cláudia. **Propriedades globais de curvas no espaço**. IMECC-UNICAMP, Campinas. 1995.

Mendes Dias, Sónia Manuela. **Introdução à Teoria de Nós**. Universidade do Minho, Departamento de Matemática. 2004.

Shifrin, Theodore. **Diferential Geometry: A First Course in Curves and Surfaces**. 1ª edição. University of George. 2016.

Tenenblat, Keti. **Introdução à geometria diferencial**. 2ª edição. São Paulo, Editora Edgard Blucger, 2011