V SEMANA UNIVERSITÁRIA DA URCA
XXIII Semana de Iniciação Científica
07 a 11 de Dezembro de 2020
Tema: "Os impactos e desafios da pandemia COVID no ensino, pesquisa e extensão"
ISSN 1983-8174

CÁLCULO DIFERENCIAL E SUAS APLICAÇÕES NA CIÊNCIA

Antonia Nara de Alencar[1]; José Augusto Pereira Nogueira[2]

Resumo: A Matemática é uma ciência exata estudada desde as séries iniciais, mas que causa grande aversão aos alunos. Muito desse medo se dá pela grande quantidade de cálculos encontrados nessa disciplina, principalmente em conteúdos estudados no Ensino Superior, e que por vezes nos fazem acreditar que os mesmos não têm aplicação no nosso dia a dia. No entanto, a Matemática é uma ciência essencial para o desenvolvimento da humanidade, pois pode ser utilizada em diversas áreas. O trabalho a seguir visa estudar o Cálculo Diferencial e sua aplicação na Ciência. Para o desenvolvimento do trabalho, realizamos pesquisas bibliográficas acerca da história, dos conceitos e fórmulas do Cálculo Diferencial. Falaremos sobre a história e trajetória da criação do Cálculo e etimologia da palavra. Incluiremos a descrição de reta tangente, teremos exemplos aplicados a Física, Economia e Geografia utilizando a derivação. Queremos dessa forma ressaltar a importância do Cálculo Diferencial e mostrar sua utilização em diversas ciências do estudo humano e em situações que encontramos no nosso cotidiano.

Palavras-chave: Aplicação**.** Cálculo Diferencial. Derivadas.

1. Introdução

A palavra cálculo foi uma expressão adotada pelos matemáticos para descrever a análise das variações que ocorrem em fenômenos naturais como a determinação da reta tangente a uma curva em um dado ponto, determinação da distância, área e volume entre várias outras utilizações. Etimologicamente, vem do latim *calculus*, que significa "contagem" ou "estimativa". Originalmente referia-se a um conjunto de pedras aos quais os pastores associavam com cada ovelha do seu rebanho, caso sobrasse pedra, estaria faltando ovelha, posteriormente essa técnica era utilizada para ensinar as crianças a contar.

O Cálculo estuda em sua grande parte dois problemas geométricos, o *Problema das Tangentes* (Cálculo Diferencial) e o *Problema das Áreas* (Cálculo Integral). Como grandes colaboradores do Cálculo Diferencial e Integral temos dois matemáticos que tiveram grande influência em diversas áreas da Ciência, Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz.

> Às vezes é dito que o Cálculo foi "inventado" por aqueles dois grandes gênios do século XVII, Newton e Leibniz. Na verdade, o Cálculo é o produto de um longo processo evolutivo que começou na Grécia Antiga e continuou no século XIX. Newton e Leibniz foram homens verdadeiramente notáveis e suas contribuições foram de importância decisiva, mas o assunto nem começou nem terminou com eles. (SIMMONS, 1996. p. 70)

[1] Universidade Regional do Cariri, e-mail: antonia.nara@urca.br
[2] Universidade Regional do Cariri, e-mail: augusto.nogueira@urca.br

ISSN 1983-8174

Apesar de usarem métodos distintos Newton e Leibniz desenvolveram o Cálculo Diferencial e Integral de forma muito semelhante, principalmente no que tange ao *Teorema Fundamental do Cálculo*, o qual relaciona diretamente os problemas das Tangentes e das Áreas.

Os conceitos e regras do Cálculo podem ser utilizados em diversas áreas da Ciência como a Química, Física, Biologia, Economia, entre outras. Faz-se necessário expandir o conhecimento sobre o Cálculo de forma a enxergar a sua presença em situações cotidianas.

2. Objetivos

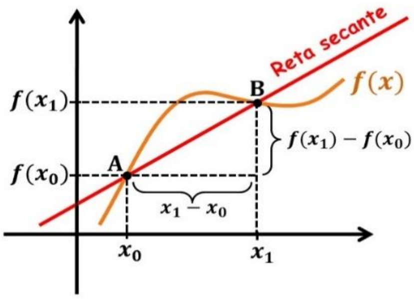
Temos por objetivo apresentar um pouco da criação do Cálculo Diferencial e suas contribuições para o desenvolvimento da sociedade. Pretendemos mostrar também sua aplicação em áreas da Ciência utilizando a derivação, através de situações problema encontradas no cotidiano.

3. Metodologia

Para o desenvolvimento desse trabalho, fez-se necessário o estudo em diversos artigos disponíveis na internet e livros que contém o assunto abordado, portanto o estudo foi de cunho bibliográfico, o que possibilitou a reflexão e a construção deste. Veremos a seguir um breve estudo sobre a *Derivada* de uma função.

Consideremos uma função $y = f(x)$ e os pontos $A = (x_0, f(x_0))$ e $B = (x_1, f(x_1))$ sobre o gráfico de f, ver Figura 1.

Figura 1: Reta secante



Fonte: Google Imagens (2020)

A reta que passa por *A* e *B* é chamada *reta secante*, e sua inclinação (coeficiente angular) é dada por

$$m_{AB} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Ao deslocarmos o ponto B sobre o gráfico de f em direção ao ponto A, vemos que x_1 se aproximará de x_0, de modo que a diferença $h = x_1 - x_0$ tenderá a 0 (zero). Com isso a reta secante tenderá a uma posição limite interceptando o gráfico de f, externamente, em um único ponto (A), tornando-se assim na reta a qual chamamos *reta tangente*, veja na Figura 2.

ISSN 1983-8174

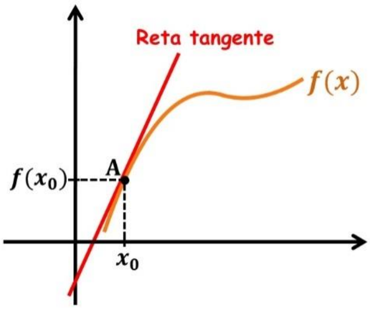
A equação de uma reta tangente ao gráfico de uma função f no ponto $(x_0, f(x_0))$ é dada por

$$y - f(x_0) = m(x - x_0)$$

onde *m* é a inclinação (coeficiente angular) da reta tangente, a qual é determinada por

$$m = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Figura 2: Reta tangente.



Fonte: Google Imagens (2020)

O coeficiente angular da reta tangente é também conhecido como a interpretação geométrica da *derivada* de uma função em um ponto x_0. Mais especificamente, a derivada de uma função $f(x)$, denotada por $f'(x)$, é

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Se existir o limite acima pra um ponto x_0, dizemos que a função f é *derivável* (ou diferenciável) em x_0. Se a função possuir derivada em todos os pontos do seu domínio, então dizemos que a função é derivável. Para indicarmos a derivada de uma função $y = f(x)$, usamos uma das notações $f'(x), y'$ ou $\frac{dy}{dx}$.

4. Resultados

Veremos nesta seção a aplicação da derivada em algumas áreas de estudo da Ciência.

1. **Aplicação na Física:** O estudo da velocidade e aceleração é amplamente estudado na Física e pode ser encontrado em nosso meio diariamente. Dada a posição de um objeto em determinado tempo, podemos modelá-la usando a função posição *s=s(t)*. Ao variarmos o tempo de t_1 para t_2, poderemos encontrar a velocidade *v(t)* do objeto neste intervalo de tempo, onde *v(t)=s'(t)*, isto é, a velocidade é a derivada da função posição. De modo análogo definimos a aceleração *a(t)*, mas em relação a velocidade, ou seja, *a(t)=v'(t)*.

Exemplo: Uma pedra é lançada para cima do topo de um penhasco de 75 m de altura e percorre uma trajetória que pode ser descrita pela função posição $s(t) = 75 + 20t - 4t^2$, onde *t* está em segundos e *s* em metros. Vamos determinar as funções velocidade e aceleração, quanto tempo a pedra leva para atingir o solo e qual a velocidade da pedra ao atingir o solo.

ISSN 1983-8174

Como $v(t)=s'(t)$ e $a(t)=v'(t)$, temos $v(t)=20-8t$ e $a(t)=20\ m/s^2$. Para determinar quanto tempo a pedra leva para atingir o solo, basta encontrar o tempo para a posição $s(t)=0$, isto é, $-4t^2+20t+75=0$. Temos uma equação de segundo grau, onde $\Delta = 20^2 - 4*(-4)*75 = 400 + 1200 = 1600$. E assim, $t = (-20 \pm 40)/(-8)$, cuja única solução é $t = 7,5\ s$. Observe que $t = -2,5\ s$ também é solução da equação, no entanto, não faz sentido já que estamos falando de tempo. Logo a pedra leva *7,5 s* para atingir o solo. Por fim, a velocidade da pedra ao atingir o solo é $v(7,5) = 20 - 8*7,5 = -40\ m/s$.

2. **Aplicação na Economia:** Os economistas costumam trabalhar com receita (R), custo (C) e lucro (L) na produção ou venda de produtos. A equação que relaciona essas três quantidades é $L = R - C$. As derivadas dessas grandezas são chamadas de receita marginal ($R'(x)$), custo marginal ($C'(x)$) e lucro marginal ($L'(x)$) e são a variação de cada grandeza em relação a quantidade x de produtos vendidos ou produzidos.

Exemplo: Uma fábrica de embalagens definiu que a produção e venda de x unidade de um tipo de embalagem gera uma receita e um custo (em reais), respectivamente, de $R(x) = 0,0025x^3 + 0,75x^2 + 25x$ e $C(x) = 0,75x^2 + 20x$. Determinar o lucro marginal para 20 unidades dessa embalagem. Calcular também o lucro real da venda de 20 e 21 unidades.

Temos que o lucro é dado pela diferença entre a receita e o custo, assim $L(x) = R(x) - C(x) = 0,0025x^3 + 0,75x^2 + 25x - 0,75x^2 - 20x = 0,0025x^3 + 5x$. E o lucro marginal é $L'(x) = 0,0075x^2 + 5$. Assim, o lucro marginal para 20 unidades é $L'(20) = 0,0075*20^2 + 5 = 8$ *reais.* O lucro real para 20 e 21 unidades são $L(20) = 0,0025*20^3 + 5*20 = 120$ *reais* e $L(21) = 0,0025*21^3 + 5 = 128,15$ *reais*. Observamos que a variação do aumento de 1 unidade (20 para 21) é aproximadamente o valor do lucro marginal para 20 unidades.

3. **Aplicação na Geografia:** O estudo do crescimento populacional de uma determinada região é amplamente estudado na área da Geografia. Dado um local de estudo, frequentemente se modela a população P através de uma função $P(t)$, onde t é o tempo em anos. Também é analisado, nessa situação, a *taxa de crescimento populacional* determinada pela derivada da função população, isto é, $P'(t)$. Esta taxa permite identificar como se comporta o crescimento da população em um período de tempo, se está aumentando ou diminuindo.

Exemplo: Consideremos que em uma cidade a população entre os anos 1980 e 2010 pode ser modelada pela função $P(t) = -3,6t^2 + 175t + 35000$, onde t está em anos e $t = 0$ equivale ao ano de 1980. Determinemos a taxa de crescimento populacional para os anos de 1980, 1990, 2000 e 2010.

Como visto acima, a taxa de crescimento populacional é a derivada da função população, assim, $P'(t) = -7,2t +175$. Dessa forma, a taxa de crescimento para os anos indicados é obtida fazendo t = 0, 10, 20 e 30, respectivamente. Logo, para **1980**: $P'(0) = -7,2*0 + 175 = 175$; **1990**: $P'(10) = -7,2*10 + 175 = 103$; **2000**: $P'(20) = -7,2*20 + 175 = 31$ e **2010**: $P'(30) = -7,2*30 + 175 = -41$. Vejamos que entre os anos de 2000 e 2010 a taxa de crescimento passou de positiva para negativa, ou seja, a população passou a decrescer a partir de um determinado ano nessa década. Para encontrar o ano exato, basta igualarmos a taxa de crescimento a 0 (zero), portanto, $-7,2t + 175 = 0 \Rightarrow 7,2t = 175 \Rightarrow t = 24,3$ anos, como estamos trabalhando com valores inteiros, então

ISSN 1983-8174

após 25 anos (comparados a partir de 1980), a população do local começou a decrescer, mais especificamente a partir do ano de 2005.

5. Considerações Finais

Abordamos neste trabalho um pouco da trajetória e conceitos do Cálculo e os processos que foram necessários para o aprimoramento do mesmo observando a importância das derivadas e o uso destas em nosso cotidiano bem como em diversas áreas científicas.

Na Física, enfatizamos o uso das Derivadas no estudo da velocidade e aceleração instantânea onde calculamos, respectivamente, a derivada da função posição e da função velocidade. Na Economia, vimos o uso das derivadas referente ao custo, lucro e receita marginal. Na Geografia, podemos notar a presença da derivada no que se refere ao estudo do crescimento populacional de uma determinada região.

Dessa forma, verificamos quão presente está o Cálculo Diferencial no nosso dia-a-dia e através do uso das derivadas podemos resolver problemas que muitas vezes, não percebemos a presença e importância destes conteúdos.

6. Agradecimentos

Agradecemos a URCA e aos recursos de financiamento do FECOP pela concessão da bolsa do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC).

7. Referências

BRASIL ESCOLA **Isaac Newton**, 2020. Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/fisica/um-fisico-chamado-isaac-newton.htm>. Acesso em: 02 nov. 2020.

DICIONÁRIO ETIMOLÓGICO **Cálculo**. Disponível em: <https://www.dicionarioetimologico.com.br/calculo/>. Acesso em: 01 nov. 2020.

LARSON, R., **Cálculo Aplicado**: um curso rápido, 9ª ed. São Paulo, SP, Cengage Learning, 2016.

SIMMONS, G. F. **Cálculo com Geometria Analítica** volume 1. São Paulo: Pearson, 1996.

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA Notas de Aula **Um pouco sobre a história do Cálculo**. Disponível em: <http://mat.ufpb.br/~lenimar/histcalc.htm>. Acesso em: 01 set. 2020.