Teorema Espectral: Uma demonstração utilizando o multiplicador de Lagrange

Natália das Neves Lucas[1], *José Tiago Nogueira Cruz*[2]

Resumo

Neste trabalho, faremos uma demonstração do Teorema Espectral para operadores auto-adjuntos utilizando os multiplicadores de Lagrange. O estudo foi realizado fazendo uso do livro "Análise Real: Funções de n Variáveis", do autor Elon Lages Lima. Para obtenção dos objetivos definidos, serão apresentados algumas definições para cálculos em superfícies, mais precisamente, abordaremos as definições de derivadas parciais, vetor gradiente, diferencial de uma função, hipersuperfície de classe C^1 e plano tangente. Em seguida, faremos uma demonstração do Teorema Multiplicadores de Langrange e usaremos esse resultado para demonstrar o Teorema Espectral.

Palavras-chave : Teorema Espectral. Multiplicadores de Lagrange. Operador auto-adjunto.

Spectral Theorem: A Demonstration Using the Lagrange Multiplier

Abstract

In this work, we will demonstrate the Spectral Theorem for self-adjunct operators using Lagrange multipliers. The study was conducted using the book " Real Analysis: Functions of n Variables ", by author Elon Lages Lima. For the defined goal, some definitions for surface calculations will be presented, more precisely, we will approach the definitions of partial derivatives, vector gradient, differential of a function, hypersurface of class C^1 and tangent plane. Next, we will demonstrate the Langrange Theorem and we will use this result to demonstrate the Spectral Theorem.

Keywords: Spectral theorem. Lagrange Multipliers. Self-adjunct operators.

[1]Licenciatura em Matemática/URCA - PIBIC/URCA. E-mail: nataliiamaria@hotmail.com
[2]DEMPA/URCA. E-mail: tiago.cruz@urca.br

1 Introdução

A Teoria Espectral é um dos resultados mais conhecidos da Álgebra linear. Esse Teorema estuda a existência de uma base ortonormal formada por autovetores de um operador linear auto-adjunto Elon (2006). A versão geral desse resultado sofre algumas modificações, por exemplo, os operadores são compactos e os espaços são de Hilbert. Mais informações sobre essa versão pode ser encontrada em Brezis (2010); Bartle (2014). Neste trabalho, vamos abordar o contexto de dimensão finita, pois não precisamos de muitos pré-requisitos. Uma das demonstrações que normalmente encontramos nos livros de álgebra linear utilizam uma pequena tecnicidade e conceitos de álgebra abstrata como, por exemplo, polinômio minimal e anuladores.

Na matemática, diversos problemas de otimização utilizam o método dos multiplicadores de Lagrange. Essa técnica permite que você encontre o máximo ou o mínimo de uma função de várias variáveis quando há alguma restrição sobre os valores de entrada Elon (1973); Thomas (2002.2). Nosso objetivo é fornecer uma demonstração alternativa para o Teorema Espectral com um forte apelo geométrico e sem muitos pré-requisitos.

Com a existência de uma base ortonormal de autovetores, conseguimos extrair aplicações interessantes: diagonalizar quádricas sem usar aquelas fórmulas enfadonhas das rotação de eixos da geometria analítica, calcular de forma prática e fácil potências de matrizes através da matriz de passagem e consequentemente calcular exponenciais de matrizes por expansão em séries.

2 Objetivos

Apresentar uma demonstração do Teorema Espectral, fundamental na álgebra linear, para operadores auto-adjuntos utilizando os multiplicadores de Langrange que garante uma importante caracterização dos pontos críticos de uma função restrita a determinados valores de entradas.

3 Metodologia

O método usado para elaboração desse trabalho, foram estudos individuais de pesquisa e participação nos seminários em grupos de Análise no $\mathbb{R}^n$. Nos seminários, foi abordado o estudo da topologia no Espaço Euclidiano, utilizando o livro Análise Real volume 2: Funções de n Variáveis, do autor Elon Lages Lima. E ainda, para desenvolvimento dos resultados foi realizado um estudo sobre Funções Reais de n variáveis e funções implícitas.

4 Preliminares

O intuito dessa seção é fornecer de forma bem sucinta pré-requisitos para a compreensão dos resultados utilizados no decorrer das próximas seções.

4.1 Derivadas parciais e vetor gradiente

Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$ e $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função que possui derivadas parciais em U. Para cada $i = 1, \ldots,$ se as aplicações

$$\begin{array}{rccc} \dfrac{\partial f}{\partial x_i}: & U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & p & \longmapsto & \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(p) \end{array}$$

forem contínuas, dizemos que f é uma função de classe C^1. Caso $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ possua uma segunda derivada parcial e se

$$\begin{array}{rccc} \dfrac{\partial f}{\partial x_j \partial x_i}: & U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & p & \longmapsto & \dfrac{\partial f}{\partial x_j \partial x_i}(p) \end{array}$$

for contínua, dizemos que f é de classe C^2. De forma indutiva definimos uma função de classe C^k, $k \in [0, \infty]$.

O vetor gradiente da função diferenciável $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, no ponto $p \in U$ é o vetor

$$\nabla f(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \frac{\partial f}{\partial x_2}(p), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) \right).$$

Dizemos que $p \in U$ é ponto crítico de $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se $\nabla f(p) = 0$. De fato, lembre-se que a diferencial da função f no ponto p é dada pela fórmula

$$df_p(v) = \langle \nabla f(p), v \rangle.$$

Assim, se p é ponto crítico de f, então

$$df_p(v) = \langle \nabla f(p), v \rangle = \langle 0, v \rangle = 0$$

para todo $v \in \mathbb{R}^n$.

4.2 Hipersuperfícies e plano tangente

Um conjunto $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ chama-se hipersuperfície de classe C^k quando é localmente gráfico de uma função real de n variáveis de classe C^k. De forma mais simples, dizemos que dado $p \in M$ existe um aberto $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e uma função $\xi : U \to \mathbb{R}$ de classe C^k tal que

$$V \cap M = \{(x_1, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_i = \xi(x_1, ..., \widehat{x_i}, ..., x_{n+1}\}.$$

onde $\widehat{x_i}$ significa "omitir x_i".

Exemplo 1: O gráfico de uma função $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^k definida no aberto U

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in U\}$$

é uma hipersuperfície de classe C^k.

Exemplo 2 A esfera
$$\mathbb{S}^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\|^2 = \langle x, x\rangle = 1\}$$
é uma hipersuperfície de classe $C^\propto$ em $\mathbb{R}^{n+1}$.

Seja $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície de classe C^k. Para $p \in M$, dizemos que um vetor $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ é tangente a M no ponto p se existe uma curva (ou caminho) suave
$$\lambda : (-\epsilon, \epsilon) \to M$$
tal que $\lambda(0) = p$ e $\lambda'(0) = v$. O conjunto de todos os vetores tangentes a M no ponto p é chamado espaço tangente a M em p e será denotado por T_pM. Em outras palavras,
$$T_pM = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \exists\lambda : (-\epsilon, \epsilon) \to M \text{ suave; } \lambda(0) = p \text{ e } \lambda'(0) = v\}.$$
Está denominação se justifica pelo Teorema

Teorema 1. *O conjunto T_pM é um espaço vetorial de dimensão n em $\mathbb{R}^{n+1}$.*

Demonstração: Veja Elon (2004.2).□

Iremos assumir aqui os seguintes resultados.

Teorema 2. *Seja $\varphi : U \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1. Se $c \in \mathbb{R}$ é valor regular de f, então $M := \varphi^{-1}(c)$ é uma hipersuperfície de U e $T_pM = \nabla\varphi(p)^\perp$.*

Demonstração: Veja Elon (2004.2). □

4.3 Multiplicadores de Lagrange

Sabemos que se c é valor regular da aplicação $\varphi : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1, então $\varphi^{-1}(c) := M$ é uma hipersuperfície regular. Queremos investigar quais são os pontos críticos de $f|_M$, isto é, queremos determinar os pontos críticos x de f sujeito à condição $\varphi(x) = c$.

Observação 1. *Não estamos interessados em encontrar pontos críticos de $f : U \to \mathbb{R}$ que estão em M. Estamos interessados em encontrar pontos críticos da função $f|_M : M \to \mathbb{R}$.*

Observação 2. *O ponto $p \in M$ é ponto crítico de $f|_M$ se, e somente se, $\nabla f(p)$ é ortogonal ao plano tangente T_pM.*

Teorema 3. *(Multiplicadores de Lagrange) Consideremos $f : U \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 no aberto U e $\varphi : U \to \mathbb{R}$ uma outra função de classe C^1. Denote $M := \varphi^{-1}(c)$ onde c é um valor regular. Um ponto $p \in M$ é ponto crítico se, e somente se, existe um número real λ tal que*
$$\nabla f(p) = \lambda \cdot \nabla\varphi(p).$$

Demonstração: O Teorema 2 garante que $\nabla\varphi(p)$ é perpendicular a T_pM. Por sua vez, a Observação 2 assegura que $\nabla f(p)$ é perpendicular ao plano tangente T_pM. Como T_pM tem dimensão n e está contido no $\mathbb{R}^{n+1}$, segue que $\nabla f(p)$ e $\nabla\varphi(p)$ são múltiplos. ■

Observação 2: A descoberta dos pontos críticos de $f|_M$ é feita ao resolver o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(p) = \lambda \cdot \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1}(p) \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(p) = \lambda \cdot \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_2}(p) \\ \qquad\qquad \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(p) = \lambda \cdot \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_n}(p) \\ \varphi(p) = c \end{cases}$$

5 Resultados

O teorema da representação matricial de uma transformação linear garante que qualquer operador $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ está associado de biunívoca a uma matriz $A = [a_{ij}]_{i,j=1,\ldots n}$. Dizemos que A é um operador auto-adjunto se $a_{ij} = a_{ji}$. Não é difícil provar que a condição $a_{ij} = a_{ji}$ é equivalente a

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$. Dizemos que $x \in \mathbb{R}^n$ com $x \neq 0$ é um autovetor associado a A se

$$Ax = \lambda \cdot x$$

para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.

Teorema 4. *(Teorema Espectral) Seja $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um operador autoadjunto, então existe uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ formada por autovetores de A.*

Demonstração: Considere a função

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \langle Ax, x\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j,$$

onde $a = [a_{ij}]$ é uma matriz simétrica $n \times n$.

Estudaremos os pontos críticos de f na esfera unitária $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$.

Note que

$$\mathbb{S}^{n-1} = \varphi^{-1}(1),$$

onde $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é dada por $\varphi(x) = \langle x, x\rangle = \|x\|^2$. Além disso,

$$\begin{cases} \nabla\varphi(x) = 2x \\ \nabla f(x) = 2Ax. \end{cases}$$

Pelo Teorema de Lagrange, os pontos críticos de $f|_{\mathbb{S}^{n-1}}$ são os pontos $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ tais que

$$\nabla f(x) = \nabla\varphi(x),$$

ou seja,

$$Au = \lambda \cdot u.$$

Nestes pontos, note que

$$f(u) = \langle Au, u \rangle = \lambda.$$

Como $\mathbb{S}^{n-1}$ é compacta, f admite pelo menos dois pontos críticos em $\mathbb{S}^{n-1}$, a saber, os pontos em que assume os valores de máximo e mínimo. Em particular, considere $\lambda_1 := f(u_1)$ como sendo o maior autovalor de A.

Considere agora o espaço de dimensão $n-1$ e

$$E = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \langle v, u_1 \rangle = 0\},$$

isto é, o complemento ortogonal do vetor u_1.

Afirmação: A restrição $A|_E : E \to \mathbb{R}^n$ é invariante sob E, isto é, $A(E) \subset E$.

De fato, se $v \in E$, então

$$\langle Av, u_1 \rangle = \langle v, Au_1 \rangle = \langle v, \lambda_1 \cdot u_1 \rangle = \lambda_1 \langle v, u_1 \rangle = 0$$

o que prova a afirmação.

Considerando agora a aplicação autoadjunta

$$A|_E : E \to E,$$

seja $f(u_2) = \lambda_2$ o valor máximo da forma quadrática $f|_E$. Então

$$Au_2 = \lambda_2 \cdot u_2.$$

Prosseguindo analogamente, obtemos uma base ortogonal e unitária $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ formada de autovetores de A. ■

6 Conclusão

O programa de Iniciação Científica tem uma grande contribuição para o bolsista, pois possibilita o estudo de temas mais avançados que não são vistos na graduação. Com a realização dos seminários em grupos e os trabalhos de pesquisas individuais se tornou possível alcançar o objetivo que se pretendia nesse trabalho, utilizar os multiplicadores de Lagrange para reproduzir uma demonstração para o Teorema Espectral diferente da que se ver no curso de Álgebra Linear.

REFERÊNCIAS

Bartle, R. G. The elements of integration and Lebesgue measure. *John Wiley & Sons. 2014.*

Brezis, H. Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations. *Springer Science & Business Media. 2010.*

Lima, E. L. Álgebra Linear. *Coleção Matemática Universitária-IMPA, Rio de Janeiro. 2006.*

Lima, E. L. Análise real. *Coleção Matemática Universitária-IMPA, Rio de Janeiro. 2004.1.*

Lima, E. L. Análise no $\mathbb{R}^n$. *Coleção Matemática Universitária-IMPA, Rio de Janeiro. 2004.2.*

Lima, E. L. Variedades Diferenciáveis. *Instituto Matemática Pura e Aplicada, Conselho Nacional de Pesquisas. 1973.*

Thomas, G. B. Cálculo, vol. 2. *Prentice-Hall. 2002.*