Método das curvas características para solução de equações diferenciais parciais

Henrique Bezerra Alcântara, Samuel Albuquerque Ramalho[1], *Jocel Faustino Norberto de Oliveira*[2]

Resumo

Neste trabalho, vamos esudar o problema de Cauchy (Problema de valor inicial) para EDP's de 1^a ordem da forma

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = c(x,y) \tag{1}$$

Faremos isso usando o método das curvas características ou simplesmente, método das cacaracterísticas. Faremos a prova do teorema que dá as condiçoes suficientes para que o problema

$$\begin{cases} a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = c(x,y), \\ u(\sigma(t),\rho(t)) = f(t), \ \forall t \in I. \end{cases} \tag{2}$$

tenha uma solução única numa vizinhança da curva inicial γ (que é coberta por características planas).

O nosso trabalho foi desenvolvido através do estudo do livro: EDP, um curso de Graduação.

Palavras-chave : Curvas características. Problema de Cauchy. Condições iniciais.

Method of the characteristic curves to partials differential equations solutions

Abstract

In this work, we will study the Cauchy problem (Initial Value problem) to PDE's of first order in the form

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = c(x,y)$$

We'll do this using the method of the characteristic curves or only, method of characteristics. We will do the proof of the theorem that provides the sufficient conditions for the problem

$$\begin{cases} a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = c(x,y), \\ u(\sigma(t),\rho(t)) = f(t), \ \forall t \in I. \end{cases}$$

have a unique solution in a neighborhood of the initial curve γ (that is covered by planes characteristic). Our work was developed through of study of book: "EDP, um curso de Graduação".

Keywords: Curves characteristics method. Cauchy problem. Initial conditions

[1]Licenciatura em Matemática/URCA - PIBIC/URCA. E-mail: henriquebezerraa1999@gmail.com; samuel.albuquerque2604@gmail.com

[2]DEMPA/URCA. E-mail: jocel.faustino@urca.br

1 Introdução

Muitas questões importantes, na Matemática, permanecem não completamente resolvidas ou mal compreendidas. E a aplicação dos estudos teóricos tem sido um dos objetivos principais dos pesquisadores, nesse contexto, Equações Diferenciais Parciais (EDP) é um dos campos mais ativos e emocionantes da pesquisa matemática contemporânea. Essa fascinante e essencial área da Matemática tem várias aplicações em toda a Ciência, Engenharia, Economia, Biologia e além.

Ao longo deste trabalho apresentaremos o método das curvas características para resolução de Equações diferenciais parciais de primeira ordem. Esse método consiste em obter uma mudança de variável especial que tem como propriedade o fato de uma das variáveis ser constante, ao longo dessas curvas. Assim, através dessa mudança de variável, a EDP é transformada em uma EDO (Equação Diferencial Ordinária) sobre tais curvas características. Resolvemos então a EDO sobre essa curvas características e em seguida retornamos as variáveis iniciais, através da transformação inversa da mudança de variável. Uma das vantagens do método é que pode ser usado sem muitos pré-requisitos. Alguns connhecimentos de importantes resultados do cálculo diferencial e noções de curvas e de álgebra linear são necessários para compreensão do método.

2 Objetivos

Apresentar o método das curvas características planas para solução de uma Equação diferencial parcial de primeira ordem. Para isso faremos a prova do teorema de existência e unicidade de solução para o problema de cauchy ou problema do valor inicial. Faremos alguns exemplos para ilustrar o método.

3 Metodologia

O presente trabalho é fruto de estudos semanais nos seminários do projeto "Introdução ao Estudo das Equações Diferenciais Parciais", no mesmo, estudamos os capítulos iniciais do livro: EDP, um curso de graduação, de autoria da Valéria Iório. Para a compreensão do conteúdo, estudamos um pouco de Equações diferenciais ordinárias.

4 Preliminares

Uma equação a derivadas parciais ou equação diferencial parcial (EDP) é uma equação envolvendo duas ou mais variáveis independentes, e derivadas parciais de uma função (variável dependente) $u = (x, y, z, t, \cdots)$. De maneira mais precisa, uma EDP em n variáveis independentes $x_1, \cdots, x_n$ é uma equação da forma

$$F(x_1, ..., x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, ..., \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n}, ..., \frac{\partial^k u}{\partial x_n^k}) = 0 \tag{3}$$

onde $x = (x_1, ..., x_n) \in \Omega$, onde Ω é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, F é uma função dada e $u = u(x)$ é a função que queremos determminar.

A classificação de EDP's segundo ordem e linearidade é semelhante á classificação das equação diferenciais ordinárias (EDO's). A ordem de uma EDP é dada pela derivada parcial de maior ordem que ocorre na equação; por exemplo, a ordem da equação (3) é k se F, como função de alguma das derivadas de ordem k, é não contante. Uma EDP é dita linear se é de primeiro grau em u e em todas as suas derivadas parciais que ocorrem na equação; caso contrário a EDP é dita não linear. A forma mais geral de uma EDP linear de primeiro grau é

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x)D_j u + b(x)u + c(x) = 0, \tag{4}$$

onde algum dos coeficientes a_j não é identicamente nulo. Para equações de segunda ordem, a forma mais geral de uma EDP linear é

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)D_i D_j u + \sum_{j=1}^{n} b_j(x)D_j u + c(x)u + d(x) = 0, \tag{5}$$

onde algum dos coeficientes a_{ij} não é identicamente nulo. No caso de duas variáveis independentes, as equações (4) e (5) podem ser reescritas, respectivamente,

$$A(x,y)u_x + B(x,y)u_y + C(x,y)u + D(x,y) = 0, \tag{6}$$

$$A(x,y)u_{xx}+2B(x,y)u_{xy}+C(x,y)u_{yy}+D(x,y)u_x+E(x,y)u_y+F(x,y)u+G(x,y) = 0. \tag{7}$$

Dizemos que uma EDP é homogênea se o termo que não contém a variável dependente é identicamente nulo. Por exemplo, a equação (6) é homogênea se e somente se a função $D(x,y)$ é identicamente nula e (7) é homogênea se e somente se $G(x,y) = 0$. Oberserve que a função identicamente nula é solução de qualquer EDP linear homogênea.

A parte da equação que contém as derivadas de maior ordem determina, em muitos casos, propriedades das soluções; essa é a chamada parte principal da EDP. Por exemplo, as partes pricipais das equações (6) e (7) são, respectivamente,

$$A(x,y)u_x + B(x,y)u_y \tag{8}$$

$$A(x,y)u_{xx} + 2B(x,y)u_{xy} + C(x,y)u_{yy}. \tag{9}$$

Dentre as equações não lineares, as que têm parte principal linear são chamadas semi-lineares. Por exemplo, uma EDP de primeira ordem semi-linear com três variáveis independentes x, y, z é da forma

$$A(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial x} + B(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial y} + C(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial z} = F(x,y,z,u). \tag{10}$$

5 Resultados

Neste capítulo, vamos estudar o problema de Cauchy (Problema de valor inicial) para EDP's de 1^a ordem da forma

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = c(x,y) \tag{11}$$

Para isso, seja γ uma curva plana inicial. Parametrizando-a por $(\sigma(t), \rho(t))$, $t \in I$, onde I é um intervalo aberto, podemos escrever o problema na forma

$$\begin{cases} a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = c(x,y), \\ u(\sigma(t), \rho(t)) = f(t), \ \forall t \in I. \end{cases} \tag{12}$$

Consideremos as seguintes hipóteses adicionais:

(i) a curva inicial γ é uma curva suave, ou seja, as funções σ *e* ρ são continuamente diferenciáveis em I e $\sigma'(t)^2 + \rho'(t)^2 \neq 0$, qualquer que seja $t \in I$;

(ii) $f \in C^1(I)$;

(iii) a,b,c $\in C^1(\Omega)$ e as funções a,b não se anulam ao mesmo tempo em Ω, onde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ é um aberto contendo γ.

Para resolvermos o problema (12), precisamos, primeiramente, encontrar as curvas características planas da equação (11) (curvas ao longo das quais a EDP (11) pode ser escrita como uma derivada total em relação a uma variável s).

Assim, as curvas características planas da equação (11) são curvas que admitem uma parametrização $(\alpha(s), \beta(s))$ que satisfaz

$$\begin{cases} \alpha'(s) = a(\alpha(s), \beta(s)) \\ \beta'(s) = b(\alpha(s), \beta(s)) \end{cases} \tag{13}$$

Para obtermos uma única solução para o sitema de EDO's (13), precisamos de um par de condições iniciais. Para isso, como a,b $\in C^1(\Omega)$, dado $(x_0, y_0) \in \Omega$, obteremos uma única solução de (13), $(\alpha(s), \beta(s))$, para s numa vizinhança de s_0 tal que

$$\alpha(s_0) = x_0, \ \beta(s_0) = y_0. \tag{14}$$

A existência e a unicidade de solução do problema (12) depende de como as curvas características intersectam a curva inicial γ.

Daremos, no Teorema abaixo, as condições suficientes para que o problema (12) tenha uma solução única numa vizinhaça da curva inicial γ (que é coberta por características planas).

Teorema 1. *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto, $I \subseteq \mathbb{R}$ intervalo aberto, γ uma curva suave em Ω paramatrizada por $(\sigma(t), \rho(t))$, $t \in I$, $f \in C^1(I)$ e $a, b, c \in C^1(\Omega)$. Suponha que $a(x,y)^2 + b(x,y)^2 \neq 0$, para todo $(x,y) \in \Omega$, e*

$$\begin{vmatrix} a(\sigma(t), \rho(t)) & b(\sigma(t), \rho(t)) \\ \sigma'(t) & \rho'(t) \end{vmatrix} \neq 0 \ \textit{para todo} \ t \ \in I.$$

Então, o problema (12) tem uma única solução de classe C^1 numa vizinhaça da curva γ em Ω. Essa solução è dada por

$$u(x_0, y_0) = f(t_0) + \textstyle\int_0^{s_0} c(x(s,t_0), y(s,t_0))ds$$

Observação: A solução no ponto $(x_0, y_0) = (x(s,t_0), y(s,t_0))$ e obtido integrando-se a EDP ao longo das característica que passa por (x_0, y_0) *de* $s = 0$ *até* $s = s_0$.

Demostração: Consideremos que as curvas características não são tangentes à curva inicial γ. Então, o vetor tangente $(\sigma'(t), \rho'(t))$ e o vetor $(a(\alpha(s), \beta(s)), b(\alpha(s), \beta(s)))$ não são paralelos (ou seja, não são linearmente dependentes).

Com esta hipótese, para cada $t \in I$, existe uma única curva caractrística plana passando pelo ponto $(\sigma(t)\rho(t))$, que é a solução de:

$$\begin{cases} \alpha'(s) = a(\alpha(s), \beta(s)) \\ \beta'(s) = b(\alpha(s), \beta(s)) \end{cases} \tag{15}$$

$$\alpha(s_0) = \sigma(t),\ \beta(s_0) = \rho(t),\ t \in I \tag{16}$$

numa vizinhança de s_0 (*tomar* $s_0 = 0$ para simplificar).

Além disso,$(\sigma(t), \rho(t))$ é o único ponto da curva característica que intersecta a curva inicial γ. Do contrário, haveria um ponto sob a curva característica cujo vetor tangente seria paralelo a $(\sigma'(t), \rho'(t))$, contradizendo a hipótese. Desse modo, podemos cobrir a vizinhaça de γ através de curvas características contidas em Ω, e que intersectam γ num único ponto.

Isso permite-nos fazer a mudança de variável $(x, y) \mapsto (s, t)$. Agora, para cada $t \in I$, denotamos a curva caracterítica que passa por$(\sigma(t), \rho(t))$ *por* $(x, y) = (x(s, t), y(s, t))$.

Fazendo isso, podemos rescrever (15) e (16) da seguinte maneira:

$$\begin{cases} x_s(s,t) = a(x(s,t), y(s,t)) \\ y_s(s,t) = b(x(s,t), y(s,t)) \quad ,\forall t \in I \\ x(0,t) = \sigma(t), y(0,t) = \rho(t) \end{cases}$$

Agora observe que:

$$0 \neq det \begin{pmatrix} a(\sigma(t), \rho(t)) & b(\sigma(t), \rho(t)) \\ \sigma'(t) & \rho'(t) \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} x_s(0,t) & y_s(0,t) \\ x_t(0,t) & y_t(0,t) \end{pmatrix}$$

para todo $t \in I$. Então, por continuidade,

$$det \begin{pmatrix} x_s & y_s \\ x_t & y_t \end{pmatrix} \neq 0, \text{ para s na vizinhança de zero.}$$

Logo, a transformação $(s, t) \mapsto (x(s, t), y(s, t))$ é localmente injetora. Podemos, então, fazer a mudança de variável $(x, y) \mapsto (s(x, y), t(x, y))$ e considerar a mudança v(s,t)=u(x,y).

Daí, tem-se

$$\frac{\partial v}{\partial s}(s,t) = \frac{\partial u \partial x}{\partial x \partial s} + \frac{\partial u \partial y}{\partial y \partial s} = a u_x b u_y = c(x,y).$$

A condição inicial para v é:

$$v(0,t) = u(x(0,t), y(0,t)) = u(\sigma(t), \rho(t)) = f(t), \forall \in I$$

Então v deve ser solução do problema de Cauchy (Problema de valor inicial)

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial s}(s,t) = c(x(s,t), y(s,t)) \\ \quad v(0,t) = f(t), \forall t \in I. \end{cases}$$

Este é um problema de valor inicial para EDO de 1^a ordem, na variável s para cada t fixo, cuja solução é obtida integrando-se de $s = 0$ a $s = s_0$, que resulta em:

$$v(s_0, t_0) = v(0, t_0) + \int_0^{s_0} c(x(s, t_0), y(s, t_0))ds$$

ou

$$v(s_0, t_0) = f(t_0) + \int_0^{s_0} c(x(s, t_0), y(s, t_0))ds.$$

Para voltar para u(x,y), dado (x_0, y_0), nessa vizinhaça de γ, seja (s_0, t_0) tal que $s_0 = s(x_0, y_0)\ e\ t_0 = t(x_0, y_0)$, isto é

$$\begin{cases} x_0 = x(s_0, t_0) \\ y_0 = y(s_0, t_0) \end{cases}$$

Então,

$$u(x_0, y_0) = f(t_0) + \int_0^{s_0} c(x(s, t_0), y(s, t_0))ds \tag{17}$$

Se u é solução de (12), então u satisfaz (17). Como (17) é solução de (12), está demonstrado que (12) tem solução única.

Assim, vimos que (17) é a solução do problema (12).

Considere o problema

$$\begin{aligned} -yu_x + xu_y &= 4xy \\ u(x, 0) &= f(x),\ x > 0. \end{aligned} \tag{18}$$

Vamos começar calculando as curvas características planas para EDP em (18). Procuramos então curvas s $\mapsto (\alpha(s), \beta(s))$ satisfazendo

$$\begin{aligned} \alpha'(s) &= -\beta(s), \\ \beta'(s) &= \alpha(s). \end{aligned} \tag{19}$$

Multiplicando a primeira equação por $\alpha(s)$, a segunda por $\beta(s)$ e somando, obtemos

$$\alpha(s)\alpha'(s) + \beta(s)\beta'(s) = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{d}{ds}[\alpha(s)^2 + \beta(s)^2] = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\alpha(s)^2 + \beta(s)^2 = Constante.$$

Portanto as curvas caracteristicas planas para a EDP em (18) são circulos centrados na origem. Como a curva inicial é o eixo $y = 0, x > 0$, a curva inicial intercecta ortogonalmente cada característica plana em exatamente um ponto e todos os pontos em $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ estão em algumas dessas características.
Ao longo do circulo de raio r centrado na origem, a EDP fica

$$\frac{d}{d\theta}u(r\cos\theta, rsen\theta) = 4r^2 sen\theta\cos\theta$$

Usando então coordenadas polares para integrar a EDP, obtemos

$$u(x,y) = \int_0^{\theta(x,y)} 4r^2 sen\theta\cos\theta d\theta + u(r,0)$$

$$=2\mathrm{r}^2 sen^2\theta\Big|_{\theta=0}^{\theta=\theta(x,y)} + f(r) = 2y^2 + f(\sqrt{x^2+y^2}).$$

Portanto a solução do problema (18) é

$$u(x,y) = 2y^2 + f(\sqrt{x^2+y^2}), (x,y) \in \mathbb{R}^2 - (x,y)$$

Vamos procurar a solução geral da equação

$$-2yu_x + u_y = ye^x \tag{20}$$

no plano interior. Com o auxílio das curvas características planas e de uma curva auxiliar que intercecta transversalmente essas características, podemos fazer uma mudança de variável $s = s(x,y), t = (x,y)$ de forma a obter uma equação mais simples. As curvas características planas para a equação (20) são dadas por

$$\begin{cases} x'(s) = -2y(s) \\ y'(s) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(s) = -s^2 - 2sc_1 + c_2 = -(s+c_1)^2 + c_1^2 + c_2 \\ y(s) = s + c_1 \end{cases}$$

e portanto as características planas são as parárabolas $x = -y^2 + k$, k constante. Tomando como curva auxiliar o eixo dos x, procuramos s e t com

$$x(s,t) = -(s + c_1(t))^2 + c_2(t), x(0,t) = t,$$

$$y(s,t) = s + c_1(t), y(0,t) = 0;$$

obtemos então

$$x = -s^2 + t, y = s$$

ou, equivalente

$$s = y, t = x + y^2 \tag{21}$$

Observe que t é constante ao longo das características planas e a curva auxiliar corresponde a $s = 0$. Fazendo a mudança de variável (21) e tomando $v(s,t) = u(x,y)$, v sastisfaz a equação

$$v_s = se^{-s^2+t}$$

cuja solução geral é dada por

$$v(s,t) = -\frac{1}{2}e^{-s^2+t} + f(t);$$

portanto a solução geral de (20) é dada por

$$u(x,y) = -\frac{1}{2}e^{x} + f(x+y^2)$$

onde $f \in C^1(\mathbb{R})$ é arbitrária.

6 Conclusão

O método das curvas característica é um interessante caso de estudo em análise que muitos alunos não tem acesso em um curso de graduação, salvo aqueles que tem a oportunidade de cursar uma disciplina introdutória em EDP. Aqui, vimos que para o entendimento do método, deseja-se que o estudante tenha conhecimentos do métodos de soluções de uma EDO, algo que é visto na grade curricular de todo curso de Matemática. Assim, vimos que esse método permite passarmos o problema de resolvermos uma equação diferencial parcial para o estudo de uma equação mais simples, no caso, uma equação diferencial ordinária.

REFERÊNCIAS

Lima, E. L. Álgebra Linear. *Coleção Matemática Universitária-IMPA, Rio de Janeiro. 2006.*

Lima, E. L. Análise no $\mathbb{R}^n$. *Coleção Matemática Universitária-IMPA, Rio de Janeiro. 2004.2.*

Guidorizzi, H.L. *um curso de Cálculo vol.3, LTC, Rio de janeiro. 2008*

Iorio, V. *EDP, um curso de graduacção. Coleção Matemática Universitária - IMPA, Rio de Janeiro. 2010*

Powers, D.L. Boundary Value Problems. *Harcourt Brace Jovanovich.*1987